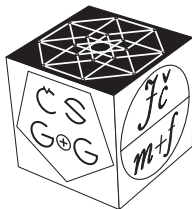


CZECH SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS
OF THE UNION OF CZECH MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS

44th Conference on
Geometry and Graphics



PROCEEDINGS OF THE
10TH CZECH-SLOVAK CONFERENCE ON
GEOMETRY AND GRAPHICS 2024

Plzeň

September 9–12, 2024



33rd Symposium on
Computer Geometry SCG'2024

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

Language correction of the publication was not performed, language accuracy is the sole responsibility of the contributing authors.

Contributions included in the proceedings were selected by the scientific committee members based on reviews.

All rights reserved. No part of this work may be used or reproduced in any manner whatsoever or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without written permission from the publisher and copyright owner.

Jednota českých matematiků a fyziků,
pobočný spolek Plzeň
Kollárova 1239/19, Plzeň

Proceedings of the 10th Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2024
First edition

© Michal Bizzarri, Miroslav Lávička, 2024
ISBN 978-80-11-05926-2 (online)

10th Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2024

Organized by:

Czech Society for Geometry and Graphics

in cooperation with

Department of Mathematics, Faculty of Applied Sciences,
University of West Bohemia in Pilsen

Union of Czech Mathematicians and Physicists, Pilsen branch

Organizing Committee:

Bohumír **Bastl** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Michal **Bizzarri** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Miroslav **Lávička** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Světlana **Tomiczková** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Jan **Vršek** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Radek **Výrut** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Scientific Committee:

Roman **Hašek** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)

Pavel **Chalmovianský** – Univerzita Komenského v Bratislave (SK)

Miroslav **Lávička** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Pavel **Pech** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)

Hellmuth **Stachel** – Technische Universität Wien (A)

Zbyněk **Šír** – Univerzita Karlova, Praha (CZ)

Margita **Vajsábllová** – Slovenská technická univerzita v Bratislave (SK)

Daniela **Velichová** – Slovenská technická univerzita v Bratislave (SK)

Gunter **Weiss** – Technische Universität Wien (A)

Table of Contents

FOREWORDS	7
PLENARY TALKS	9
JAROSLAV HRDINA <i>Very short introduction to Projective Geometric Algebra</i>	11
PAVEL CHALMOVIANSKÝ <i>Bridges between algebraic and differential geometry</i>	21
JAN LEGERSKÝ <i>Paradoxní pohyblivost: realizace grafů a mnohostěny.</i>	29
CONTRIBUTED TALKS	39
BERÁNKOVÁ ELIŠKA <i>Porovnání českého a švédského vzdělávacího programu se zaměřením na výuku geometrie.</i>	41
ČEČÁKOVÁ STANISLAVA, KOLÁŘOVÁ DANA <i>Origami Tessellations</i>	47
FERDIÁNOVÁ VĚRA, PLINTA MARTIN <i>Chyba ve výuce stereometrie</i>	51
GERGELITSOVÁ ŠÁRKA, HOLAN TOMÁŠ <i>Stavitelka</i>	63
HAMAJOVÁ KLAUDIA, CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>A Non-linear Parabola-preserving Subdivision Scheme</i>	69
ROMAN HAŠEK, KATEŘINA KALOVÁ <i>Trisekce úhlu jako téma projektu v přípravě učitelů matematiky</i>	75
KOKTAVÁ MARIE <i>Stromový tomograf</i>	81
KUBÁT JAKUB, HLAVOVÁ MARTA <i>Tvorba parametrických CAD modelů v prostředí Grasshopper – Rhinoceros</i>	87
MOLNÁR MICHAL <i>Factorization of polynomials over quaternions and dual quaternions</i>	93

STACHEL HELLMUTH <i>Henrici's flexible hyperboloid and snapping spatial four-bars</i>	99
TKADLECOVÁ MIROSLAVA <i>Zborcený hranol a jeho spojitost s origami</i>	105
SVĚTLANA TOMICZKOVÁ <i>Od dynamické geometrie k 3D tisku.</i>	111
VAJSÁBLOVÁ MARGITA <i>Variants of the map equations of the conic projection from different aspects of use</i>	119
VELICHOVÁ DANIELA <i>Vector division in Minkowski point set operations.</i>	129
ŠÁRKA VORÁČOVÁ <i>Geometric Problems Related to the Euclidean Minimum Spanning Tree</i>	137
MICHAL ZAMBOJ <i>A ruler construction of imaginary numbers on a conic</i>	143
LIST OF PARTICIPANTS	149

Forewords

The 10th CZECH-SLOVAK CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS took place in Pilsen, the capital of the West Bohemian region, from September 9 to 12. This year the conference was hosted by the Faculty of Applied Sciences of the University of West Bohemia. Continuing a recent tradition, it was held as a joint event combining two long-standing conferences organized by national societies for geometry and graphics: the 44th CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS from the Czech Republic and the 33rd SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY SCGG 2024 from Slovakia. This partnership strengthened the collaborative spirit of the Czech-Slovak community in these disciplines, allowing participants to engage in cross-border exchanges and strengthen professional connections.

About 40 participants from four countries – the Czech Republic, Slovakia, Austria and Spain – came together to immerse themselves in a comprehensive and intellectually stimulating conference program. This program spanned various disciplines within geometry and graphics, featuring 26 contributed talks that covered a wide range of topics, including applied and pure geometry, computer graphics, and the educational aspects of teaching geometry. The diversity of the presentations provided valuable insights into both theoretical foundations and practical applications of these fields.

In addition to the contributed talks, participants were treated to three engaging invited plenary talks, each exploring different facets of geometry and graphics. These plenary sessions offered fresh insights, making them a highlight of the conference and broadening participants' perspectives on fundamental theories, applications, and didactic issues.

JAN LEGERSKÝ from the Czech Technical University presented his lecture on *Paradoxical Flexibility: Frameworks and Polyhedra*. His talk delved into the theory of rigidity, specifically whether a bar-joint framework – a graph realized in d -dimensional space – can undergo continuous deformation while preserving the distances between adjacent vertices. This topic highlighted the fascinating connection between combinatorics and geometry, along with its extensions.

PAVEL CHALMOVIANSKÝ from Comenius University in Bratislava delivered an invited lecture titled *Bridges and Differences of Differential and Algebraic Geometry*. He explored concepts that bridge these two fields, such as Euler characteristics, genera, and the second fundamental form related to curvature. Despite the complexity of the general theory, he provided elementary examples illustrating the intersections and differences

between differential and algebraic geometry.

JAROSLAV HRDINA'S talk focused on the role of geometric algebras in applications and education. He explained that the algebra of quaternions, essential in computer graphics, offers a faster alternative to matrix calculus. Geometric algebras, increasingly applied across various fields, use elements of the Grassmann algebra to represent geometric objects and transformations. This approach leverages multivectors and the „sandwich product” for efficient Euclidean transformations, similar to quaternions and dual quaternions. Hrdina demonstrated the fundamental principles of geometric algebras and outlined how they could be incorporated into an introductory course in analytic geometry.

The conference participants had a memorable experience exploring the historical center of Pilsen. They enjoyed the sights around the beautiful central square, which is surrounded by charming streets, colorful facades, and significant landmarks, such as St. Bartholomew's Cathedral and the Renaissance-style City Hall. The setting added a sense of timelessness to the event, allowing participants to immerse themselves in the city's rich architectural and cultural history.

The conference sessions were held at the Museum of West Bohemia, which provided an inspiring and historic backdrop with its unique genius loci. The museum's displays and ambiance contributed to an environment rich in knowledge and cultural heritage, fostering engaging discussions and a vibrant exchange of ideas.

As part of the program, attendees enjoyed an excursion to the Plasy Monastery. This former Cistercian monastery, located north of Pilsen, is an architectural gem known for its Baroque style and intricate water management system designed by architect Jan Blažej Santini-Aichel.

We would like to invite you to attend the next joint event – the 34th SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY SCG 2025 and the 45th CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS – which will once again be organized by representatives from both societies for geometry and graphics. This event, the 11th SLOVAK-CZECH CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS, will be held September 8–11, 2025 in Bratislava, the capital of Slovakia, a city known for its rich history and vibrant cultural scene.

Praha & Bratislava, November 25, 2024

Zbyněk Šír
chair of CSGG

Daniela Velichová
chair of SSGG

PLENARY TALKS

Very short introduction to Projective Geometric Algebra.

Jaroslav Hrdina

*Institute of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering,
Brno University of Technology
Technická 2896/2, 616 69 Brno, Czech Republic
hrdina@fme.vutbr.cz*

Abstract. Projective Geometric Algebra (PGA) is an effective notation combining homogeneous coordinates and dual quaternions. It is, therefore, becoming popular in areas using Euclidean transformations, especially in computer graphics and robotics. The text presented is a soft introduction to this topic, using examples of analytic geometry to present the concepts.

Keywords: analytical geometry, geometric algebra, projective geometric algebra

1 Introduction

This text aims to provide the reader with an easy insight into calculations based on projective geometric algebra (PGA). The PGA algebra combines three principles: the effective use of scalar and vector products, homogeneous coordinates, and rotation by quaternions \mathbb{H} . The text is freely based on books [7, 6] and text [3] plus videos on the community server bivector.net. These sources differ in terminology and technical details, but they have a common focus on the geometric essence of PGA.

The concepts of GA are associated with the four famous mathematics from the nineteenth century. In the years 1843, 1844, and 1865, three essential discoveries were made. The concept of Plücker coordinates was established in 1865. Julius Plücker (1801 - 1868) was a German mathematician and physicist. He made fundamental contributions to the field of analytical geometry. The idea of Grassmannian algebras came form 1844. Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877) was a German mathematician, physicist, general scholar, and publisher. His mathematical work preceded and exceeded the concept now known as vector space. Quaternions are sometimes called Hamiltonian numbers. Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) was an Irish mathematician, astronomer, and physicist. Hamilton made his discovery of the algebra of quaternions in 1843.

In 1878, W. K. Clifford published a work, building on Grassmann's extensive algebra. He unified the quaternions, developed by William Rowan Hamilton, with Grassmann's outer product. William Kingdon Clifford (1845 - 1879) was a British mathematician and philosopher. Building on the work of Hermann Grassmann, he introduced what is now termed geometric algebra.



Fig. 1: Julius Plücker, Hermann Günther Grassmann, Sir William Rowan Hamilton, William Kingdon Clifford (photo: Wikimedia Commons)

2 Plücker's good old times

In a basic course in analytic geometry, three products are usually defined in coordinates. We call them scalar \cdot , vector \times , and mixed $[-]$ product. In the case of \mathbb{R}^3 , the definitions have the following standard form

$$\begin{aligned}
 u \cdot v &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z, \\
 u \times v &= \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right), \\
 [u, v, w] &= (u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

where $|\cdot|$ is the definition of the determinant. Using these products, we can describe linear objects. If the plane is defined by a point p_2 and a normal vector n , the point p_1 lies on the plane when $n \cdot (p_1 - p_2) = 0$, and after a short computation, we get the well-known equation $n \cdot p_1 - n \cdot p_2 = n \cdot p_1 - d = 0$. If the line is defined by a point p_2 and a directional vector v , the point p_1 lies on the line when $v \times (p_1 - p_2) = 0$ and again, after a short computation, we get the well-known equation $v \times p_1 - v \times p_2 = v \times p_1 - m = 0$. These considerations lead to the so-called Plücker coordinates, which are invariant to the multiplication by a non-zero scalar and which are normed as $\{n, d\}$, $|n| = 1$ for plane and $[v, m]$, $|n|^2 + |m|^2 = 1$ for line. With the help of a simple example, we will show how the coordinates can be used. Consider three (linearly independent) planes $\{n_1, d_1\}$, $\{n_2, d_2\}$ and $\{n_3, d_3\}$. Their intersection is then the solution of the system

$$\begin{pmatrix} \leftarrow n_1 \rightarrow \\ \leftarrow n_2 \rightarrow \\ \leftarrow n_3 \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \end{pmatrix}$$

where $(\leftarrow n_i \rightarrow)$ is a vector n_i in the row. By straightforward computations, we can see that the inverse matrix of the system can be written using the vector and mixed product, as

$$\begin{pmatrix} \leftarrow n_1 \rightarrow \\ \leftarrow n_2 \rightarrow \\ \leftarrow n_3 \rightarrow \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(n_1 \times n_2) \cdot n_3} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n_2 \times n_3 & n_3 \times n_1 & n_1 \times n_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

and the resulting solution vector is then in the form

$$d = \frac{d_1(n_3 \times n_2) + d_2(n_1 \times n_3) + d_3(n_2 \times n_1)}{(n_1 \times n_2) \cdot n_3}$$

This is nothing more than a geometric notation of Cramer's rule, but it is shown that the consistent use of all products allows an efficient notation, [7, 6].

If we use homogeneous coordinates $(x, y, z) \leftrightarrow (x, y, z, 1)$ then the equation of the plane $g = \{n, d\}$ can be rewritten as

$$g \cdot p = (n_x, n_y, n_z, d) \cdot (p_x, p_y, p_z, 1) = 0, \quad |n| = 1.$$

Now, the distance of a point p from the plane g can be expressed as $g \cdot p$, the projection of the point p onto the normal n of the plane g as $(g \cdot p)n$ and the projection of the point p onto the plane g as $p - (g \cdot p)n$. Finally, the reflection with respect to g can be expressed as $P_n(x) = p - 2(g \cdot p)n$.

As was already said in the coordinates, the line is determined by two vectors: the vector v is called directional, and the vector n is called moment. The problem is that the direction vector encodes the length while the moment vector encodes the volume, as seen in the following example. The line is defined by the two points s and t , i.e. the directional vector is $v = s - t$ and the moment vector is $s \times t$. If we transform both points by a linear transformation M we can easily see what linear transformation is induced on the directional vector v and moment vector n .

$$M(v) = M(s) - M(t) = M(s - t) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} M(n) &= M(s) \times M(t) = (s_x M_1 + s_y M_2 + s_z M_3) \times (t_x M_1 + t_y M_2 + t_z M_3) \\ &= (s_y t_z - s_z t_y)(M_2 \times M_3) + (s_z t_x - s_x t_z)(M_3 \times M_1) \\ &\quad + (s_x t_y - s_y t_x)(M_1 \times M_2) \\ &= \begin{vmatrix} s_y & s_z \\ t_y & t_z \end{vmatrix} (M_2 \times M_3) + \begin{vmatrix} s_z & s_x \\ t_z & t_x \end{vmatrix} (M_3 \times M_1) \\ &\quad + \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} (M_1 \times M_2) = (s \times t) M^* \end{aligned}$$

(2)

Calculations (1) and (2) show that the linear transformation on the direction vector acts as a multiplication by matrix M from the left, while on the moment vector, it acts as a multiplication by adjoint matrix M^* from the right. This nicely demonstrates that the directional and moment vectors have different geometric natures.

3 Grasmann big revolution

In the previous chapters, we have shown that the geometric nature of directional and moment vectors differs. A direction vector is a vector connecting two points that determine a line. The moment vector is the normal vector of the plane defined by the origin and these two points.

So, we should be able to decide whether it is a vector defining a line or a plane. We therefore introduce Grasmann algebra $\wedge\mathbb{R}^3$, i.e. the algebra of all linear subspaces of $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. We introduce a product \wedge on \mathbb{R}^3 called wedge with the property $u \wedge u = 0$, where $u \in \mathbb{R}^3$. This property then induces anti commutativity

$$(u + v) \wedge (u + v) = u \wedge v + v \wedge u \Rightarrow u \wedge v = -v \wedge u$$

on vectors. So we have operation \wedge together with $u \wedge v = -v \wedge u$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, distributivity and associativity, i.e. we have $2^3 = 8$ dimensional vector space

$$\wedge\mathbb{R}^3 = \langle 1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \rangle$$

equipped with multiplication \wedge , i.e. associative linear algebra. We demonstrate the multiplication with an example

$$\begin{aligned} (1 + e_1 \wedge e_2) \wedge (e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\ = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \\ = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Now, we must show how to use multiplication \wedge to represent linear objects going through the origin, i.e. linear subspaces of \mathbb{R}^3 . We start with a line passing through the origin. Such a line has coordinates $\ell = \{v, 0\}$ and

$$x \in \ell \Leftrightarrow x \wedge v = 0$$

because of $v \wedge \alpha v = -\alpha v \wedge v \Rightarrow v \wedge \alpha v = 0$. So we can define a line as a set

$$\mathcal{A}(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \wedge v\}.$$

Let's think about what linear object then corresponded to the set $\mathcal{A}(\pi)$, where $\pi = v \wedge w \neq 0$, i.e. $v, w \in \mathbb{R}^3$ are linear independent. If we express any point $x \in \mathbb{R}^3$ as $x = x_v v + x_w w + z$, where $z = x_z(v \times w)$ we get

$$(x_v v + x_w w + z) \wedge \pi = z \wedge v \wedge w = 0$$

So $x \in \mathcal{A}(\pi) \Leftrightarrow x = x_v v + x_w w$ and the set $\mathcal{A}(\pi)$ corresponds to the plane $\{v \times w, 0\}$.

An additional on \mathbb{R}^3 , we already have a scalar product $u \cdot v$. With the help of the scalar product, we define a new operation on the Grassmann algebra $\wedge \mathbb{R}^3$, which we will call (left) contraction and denote by the same symbol. The contraction of the vector x with the vector (line passing through the origin) ℓ is defined directly as the scalar product $x \cdot \ell$. Contraction of the vector x and the bivector (the plane passing through the origin) $\pi = u \wedge v$ is defined as

$$x \cdot (u \wedge v) = (x \cdot u)v - (x \cdot v)u$$

and the contraction of two bivectors (planes passing through the origin) as

$$(x \wedge y) \cdot (u \wedge v) = (x \cdot (y \cdot (u \wedge v))).$$

Through contraction, we can define linear objects passing through the origin as the following sets in the same way as in the case of wedge operation

$$\bar{\mathcal{A}}(n) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = 0\},$$

where $n \in \mathbb{R}^3$. We see that $\bar{\mathcal{A}}(n)$ represents the plane $\{n, 0\}$. In the case $\bar{\mathcal{A}}(u \wedge v)$ we have

$$x \cdot (u \wedge v) = (x \cdot u)v - (x \cdot v)u = 0 \Leftrightarrow (x \cdot u) = (x \cdot v) = 0$$

and $\bar{\mathcal{A}}(u \wedge v)$ represents the line $\{u \times v, 0\}$. Together, we can see that

$$\mathcal{A}(u \wedge v) = \bar{\mathcal{A}}(u \times v), \quad \bar{\mathcal{A}}(u \wedge v) = \mathcal{A}(u \times v).$$

The next step is introducing homogeneous coordinates to reproduce a linear object that does not go through the origin. In Gramsmann's formalism, we add a point in infinity e_0 to receive $\wedge \mathbb{R}^4$, where $\mathbb{R}^4 = \langle e_0, e_1, e_2, e_3 \rangle$ and the point is represented as

$$x = e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = e_0 + x,$$

i.e wedge of two points

$$(e_0 + x) \wedge (e_0 + y) = e_0 \wedge (y - x) + x \wedge y$$

represents the line $\{y - x, x \times y\}$, where $y - x$ is a directional vector and $x \wedge y$ moment bivector. Note that a vector is a difference of two points $x - y \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. A point plus a vector is a point, so we have affine geometry.

Finally, we can see a point x as an intersection of three planes $\bar{\mathcal{A}}(\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3)$, i.e. as a trivector

$$x e_3 \wedge e_2 \wedge e_0 + y e_1 \wedge e_3 \wedge e_0 + z e_2 \wedge e_1 \wedge e_0 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

Now, for example, the origin can have two expressions e_0 or $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$.

4 Hamilton on the bridge

The initial idea was to use complex numbers for rotations in the \mathbb{R}^2 plane. If we implement complex numbers \mathbb{C} based on Moivre form

$$z = |z| \exp(\theta i) = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$$

then it is easy to see that the multiplication by a unit complex number $\exp(\theta i)$ realizes a rotation around the origin in \mathbb{C} . Thus, the algebra of complex numbers also contains Euclidean transformations. The aim was to create an algebra to realize the rotations in \mathbb{R}^3 . On the day of 16 October 1978, Hamilton was walking along the Royal Canal in Dublin with his wife when he discovered the solution in the form of the equation

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k.$$

If the point (x_1, x_2, x_3) is realized as a imaginary quaternion $x = x_1i + x_2j + x_3k$, then the rotation about the angle θ around the axis $n = n_1i + n_2j + n_3k$ is realized by means of a multiplication $qx\bar{q}$, where $q = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})n$ and $\bar{q} = \cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})n$.

For example, rotation about the z -axis by the angle θ corresponds to the quaternion $q_\theta = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})k$ and the following rotation of element $x = x_1i + x_2j + x_3k$ is

$$\begin{aligned} q_\theta x \bar{q}_\theta &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k \right) (x_1i + x_2j + x_3k) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k \right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(x_1j - x_2i - x_3) \right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k \right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(x_1j - x_2i - x_3) \\ &\quad - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(-x_1j + x_2i - x_3) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x_1i + x_2j - x_3k) \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (x_1i + x_2j) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(x_1j - x_2i) \\ &\quad + x_3k = \cos(\theta)(x_1i + x_2j) + \sin(\theta)(x_1j - x_2i) + x_3k. \end{aligned}$$

It is clear from the expression above that it is a rotation about the z -axis with respect to θ .

5 Clifford's icing on the cake

Currently, we have Grassmannian algebra equipped with two operations, wedge product $u \wedge v$, and contraction $u \cdot v$. At the same time, we know how to use the quaternion algebra \mathbb{H} for rotations of the space \mathbb{R}^3 . The last step in defining the GA is defining a geometric product representing both operations. We define linear algebra

$$\mathbb{G}_3 = \langle 1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3 \rangle$$

with multiplication determined by $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$, $e_i e_j = -e_j e_i$, $i \neq j$, distributivity and associativity. So, for example, we can multiply two elements as

$$\begin{aligned} (e_1 e_2 + e_3)(e_1 + e_1 e_2 e_3) &= e_1 e_2 e_1 + e_1 e_2 e_1 e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_3 e_1 e_2 e_3 \\ &= -e_2 - e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2. \end{aligned}$$

In this linear algebra, using geometric product, we can define wedge operation by rules

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \frac{1}{2}(uv - vu), \\ u \wedge v \wedge w &= \frac{1}{6}(uvw - uvw + vwu - vwu + wuv - wvu). \end{aligned}$$

So it is therefore the case that the base $\wedge \mathbb{R}^3$ is the same as the base \mathbb{G}_3 because of $e_i e_j = e_i \wedge e_j$, $i \neq j$ and $e_i e_j e_k = e_i \wedge e_j \wedge e_k$, $i \neq j \neq k$. Simultaneously, on the vectors \mathbb{R}^3 , we can define a contraction

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu),$$

so we can look at GA as a Grassmann algebra and work with linear objects defined in Grassman algebra.

The advantage is that geometric multiplication allows us to write formulas more easily. In the operator $P_n(x) = x - 2(x \cdot n)n$ of reflection with respect to the hyperplane $\{n, 0\}$, we use the definition of contraction by the geometric product

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x - 2(x \cdot n)n = x - 2\left(\frac{1}{2}(xn + nx)n\right) \\ &= x - (xnn + nxx) = x - x - nxx = -nxx. \end{aligned}$$

So, the reflection with respect to the hyperplane $\{n, 0\}$ is repressed by the operator $P_n(x) = -nxx$.

The rotation can then be seen by a series of reflections with respect to the two hyperplanes $\{a, 0\}$ and $\{b, 0\}$, i.e. $(ba)x(ab)$. For example

$$\begin{aligned} ab &= (\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2)(\cos(\beta)e_1 + \sin(\beta)e_2) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta))e_1 e_2 \\ &= \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta)e_1 e_2 = \exp(\gamma e_1 e_2) \\ &= \cos(\gamma) + \sin(\gamma)e_1 e_2. \end{aligned}$$

We can see that $(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -1 \Rightarrow \exp(\gamma e_1 e_2) = ab$, which corresponds to a rotation about the origin in the plane $\{e_3, 0\}$. If we look

closely at the bivector space $\wedge^2\mathbb{R}^2 = \langle e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 \rangle$ then we see that $\wedge^2\mathbb{R}^2 \cong \text{Im}\mathbb{H}$ from the following straightforward computations

$$\begin{aligned}(e_1e_2)^2 &= e_1e_2e_1e_2 = -1, & (e_3e_1)^2 &= e_3e_1e_3e_1 = -1, \\ (e_2e_3)^2 &= e_2e_3e_2e_3 = -1, \\ (e_1e_2)(e_2e_3) &= e_1e_3, & (e_1e_2)(e_3e_1) &= e_2e_3, & (e_3e_1)(e_2e_3) &= e_1e_3.\end{aligned}$$

So we have identification $e_2e_3 \leftrightarrow i$, $e_1e_3 \leftrightarrow j$, $e_1e_2 \leftrightarrow k$, and quaternionic rotors

$$n \in \wedge^2\mathbb{R}^2, \quad q = \exp\left(\frac{\theta}{2}n\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n$$

in our algebra. Let's see how this transformation affects objects in homogeneous coordinates on $\wedge\mathbb{R}^4$. For example, by rotating the line based on points x and y , i.e. $\ell = e_0 \wedge (y - x) + x \wedge y$, we have

$$\begin{aligned}q\ell\bar{q} &= q(e_0 \wedge (y - x) + x \wedge y)\bar{q} \\ &= (qe_0\bar{q}) \wedge q(y - x)\bar{q} + (qx\bar{q}) \wedge (qy\bar{q}) \\ &= e_0 \wedge q(y - x)\bar{q} + (qx\bar{q}) \wedge (qy\bar{q})\end{aligned}$$

and we see that the output is a line determined by points $(qx\bar{q})$ and $(qy\bar{q})$ and that is exactly what we expect.

As we have already said, the point is represented in homogeneous coordinates as $p = e_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3$ or as an intersection of three independent planes $p = \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3$. Now, we must expand the scalar product to \mathbb{R}^4 . The key is that we define

$$\mathbb{G}_{3,0,1} = PGA \text{ (Projective geometric algebra)}$$

by choosing $e_0^2 = 0$. The plane in homogeneous coordinates is determined by the vector $de_0 + n$, where n is a unit normal vector and d is distance from the origin. A translation can be defined by reflection using two parallel planes

$$(d_1e_0 + n)(d_2e_0 + n) = 1 + e_0n(d_1 - d_2) = 1 + e_0t, \quad t \in \mathbb{G}_3.$$

The origin can be defined as vector e_0 , or intersection of three perpendicular planes $e_1e_2e_3$. If these representations of origin are transposed we receive

$$\begin{aligned}(1 + e_0t)e_0(1 + e_0t) &= e_0 \\ (1 + e_0t)e_1e_2e_3(1 + e_0t) &= e_1e_2e_3 + e_1e_2e_3e_0t + e_0te_1e_2e_3 \\ &= e_1e_2e_3 - e_1e_2e_3te_0 + te_1e_2e_3e_0 \\ &= e_1e_2e_3 + (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \wedge t \wedge e_0 \\ &= e_1e_2e_3 + 2(t_1e_2e_3 - t_2e_1e_3 + t_3e_1e_2) \wedge e_0\end{aligned}$$

so the right representation of the origin is $e_1e_2e_3$ and the point is represented by embedding

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto e_1e_2e_3 + 2(t_1e_2e_3 + t_2e_3e_1 + t_3e_1e_2) \wedge e_0.$$

So in PGA we can work with all linear objects as in $\wedge\mathbb{R}^3$ and at the same time use rotation using the quaternions \mathbb{H} . The corresponding representations in the algebra elements are summarized in the Tables 1 and 2.

Table 1: Representations of the PGA objects.

PGA	representation based on \cdot
Point	$e_1e_2e_3 + 2(t_1e_2e_3 + t_2e_3e_1 + t_3e_1e_2) \wedge e_0$
Plane	$de_0 + n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3$
Line	$\pi_1 \wedge \pi_2$
	representation based on \wedge
Point	$P = e_0 + t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3$
Plane	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Line	$P_1 \wedge P_2$

Table 2: transformations in PGA.

PGA	Transformations
Rotation	$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_1e_2e_3 + n_2e_1e_3 + n_3e_1e_2)$
Translation	$1 + \frac{1}{2}(t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3)e_0$
General rotation	$\left(1 + \frac{1}{2}te_0\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n\right) \left(1 + \frac{1}{2}te_0\right)$

6 Where to play

Currently, geometric algebras are implemented in almost all standard softwares. In the case of Maple, it is a package Clifford, [1].

In the case of Matlab, the following two packages are the most popular: package SUGAR <https://github.com/distributed-control-systems/SUGAR>, [9] and package Clifford <https://clifford-multivector-toolbox.sourceforge.io/>, [8].

In the case of Python, it is primarily a package Clifford <https://clifford.readthedocs.io/>, [4] and its associated package Kingdon <https://github.com/tBuLi/kingdon>.

In the case of Julia it is package SimpleGA, <https://github.com/MonumLtd/SimpleGA.jl>, [2].

As online resources, they deserve attention Community Server and Discord channel <https://bivector.net/> and two online playing rooms, Coffeeshop <https://enkimute.github.io/ganja.js/> and Teahouse <https://tbuli.github.io/teahouse/lab/index.html>. Enjoy!

An advantage of GA that we haven't mentioned is the faster speed with the right implementation choice. For these purposes, it is possible to use the web interface <http://www.gaalop.de/gaalopweb/>, [5].

References

- [1] R. Ablamowicz, B. Fauser: *Mathematics of Clifford - a Maple package for Clifford and Grassmann algebras*, Adv. Appl. Clifford Algebras 15, 157–181, 2005
- [2] Ch. Doran: *SimpleGA. A lightweight Geometric Algebra library*, GitHub repository
- [3] L. Dorst, S. De Keninck: *A Guided Tour to the Plane-Based Geometric Algebra PGA*, bivector.net, 2022
- [4] H. Hadfield, E. Wieser, A. Arsenovic, R. Kern: *pygae/clifford*, Zenodo
- [5] D. Hildenbrand: *Introduction to Geometric Algebra Computing*. CRC Press, Boca Raton, 2019
- [6] K. Kanatani: *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics* CRC Press, 2015
- [7] E. Lengyel: *Projective Geometric Algebra Illuminated*, Terathon Software LLC, 2023
- [8] S. Sangwine, E. Hitzer: *Clifford Multivector Toolbox (for MATLAB)*, Advances in Applied Clifford Algebras, vol. 27(1) Springer, pp. 539–58, 2016
- [9] M. Velasco, I. Zaplana, A. Dória-Cerezo, P. Martí, *Symbolic and User-friendly Geometric Algebra Routines (SUGAR) for Computations in Matlab*, arXiv <https://arxiv.org/abs/2403.16634>, 2024

Bridges between algebraic and differential geometry

Pavel Chalmovianský

Department of algebra and geometry

*Faculty of Mathematics, Physics and Informatics Comenius University
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovak Republic*

email: pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstract. Algebraic geometry and differential geometry went by paths which did not have many common points in their beginnings. However, modern language of mathematics, starting with the notion of algebraic scheme allowed to formulate many concepts in a way understandable for both disciplines. We follow the some steps on the long roads of both disciplines and show what is connecting both areas of geometry. The problems and solutions obtained during the paths are interesting on their own, however they formed many new question in both areas and thus contributed to the development of the geometry in many ways.

Keywords: algebraic variety, differential manifold, scheme

1 Introduction

Algebraic geometry and differential geometry went long time separate paths. The notion of a scheme, appearing in the end of the 20th century covers objects we are working with in both areas, the objects of the differential geometry as well as the fundamental notions of algebraic geometry. We follow the topics and problems that marked the expected connections between these areas of geometry and started the building of the common language used in both areas.

2 Local and global problems of differential geometry

2.1 Classical topics in differential geometry

When starting teaching differential geometry, we usually show the geometry of curves (curvature κ , torsion τ, \dots , fundamental theorem of curves). Following the theory of surfaces (curvatures – Gaussian K and mean H , Theorema Egregium, surfaces of constant curvature, \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n , \mathbb{E}^n , special curves on surfaces such as geodesics). Geodesics and parallel transport, holonomy and their relations to the curvature. Local coordinates based on geodesics form a useful tool.

Learning about the first I and the second II fundamental forms – metric and embedding of the surface (including further conditions), we recognize that the determination of I in a coherent way connected to a smooth manifold leads to the notion of Riemannian manifold.

For applications, shape operator (Weingarten map), principal curvatures, orthogonal curvilinear coordinates and the Gaussian curvature as a ratio of certain areas is significant. Mean curvature is important when

minimizing area of the surfaces and smooth them. The results so far belong mainly to the local geometry.

Several global theorems for curves which are moderately difficult to prove are four vertex theorem, Jordan curve theorem, various variational results connecting lengths and areas.

Among the very important global theorems of surfaces, Gauss-Bonnet theorem provides a relation of curvature integral over a surfaces with the topological invariant $\chi(S)$ of the surface known as Euler characteristic.

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi\chi(S)$$

Minimal surfaces with a fixed boundary are known to minimize certain area integral connected to the mean curvature, etc.

Given a Riemannian metric on a 2-dimensional surface, can one find an embedding of the surface into \mathbb{R}^3 that preserves the metric? How does the embedding depend on the curvature of the surface? The problems of constructing embedding of a surface is a more difficult one due to additional conditions required.

Global properties of surfaces like completeness, compactness, and the behavior of geodesics are mutually influenced by curvature. As a taste of such theorems, we provide the following ones.

Hadamard's theorem: A complete surface with negative curvature has no conjugate points (conj. points can be connected with a one parametric family of geodesics, consider a sphere), and its universal cover is diffeomorphic to the plane.

Hopf-Rinow theorem: A complete Riemannian manifold is geodesically complete, hence geodesics can be extended indefinitely.

An important issue when constructing objects are conditions of uniqueness. It is sometimes called flexibility or rigidity of a construction of a map or a manifold. We know many such conditions.

- Linear map is uniquely determined by the values on a basis.
- A polynomial f of one indeterminate is uniquely given by the values of $\deg f + 1$ distinct points.
- A holomorphic function is determined by a germ at a point.
- A harmonic function on a disc is determined by the values on the boundary of the disc.
- Liouville's rigidity – a conformal mapping $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 3$, is given only by global conformal mappings of the ambient space which are Möbius transformations.
- Mostow rigidity theorem isometry of a complete, finite volume hyperbolic manifold is determined only by a rigid motion of a hyperbolic space, more precisely by an element of its fundamental group.

- Cohn-Vossen's rigidity theorem states that a compact convex surface in \mathbb{R}^3 is uniquely determined (up to rigid motions) by its intrinsic metric.
- Nash's embedding theorems solve the question "Can every Riemannian manifold be embedded isometrically into Euclidean space?"

3 Global and local problems of algebraic geometry

3.1 Classical algebraic geometry questions

Algebraic geometry around a century ago provided only a set of approaches for particular problems without any developed and summarized theory. The problems which were solved covered solutions of various (systems of) polynomial equations (Cardano), implicit function theorem (Cauchy), curves in (projective) space (Pascal, Desargues), quadrics (many), abelian integrals (Hilbert).

A classical set of problems was counting problems represented by a question "How many solutions are there for some construction described by polynomials?". Some answers for finitely many solutions was provided by Bézout. When the solutions formed an infinite set, a notion of algebraic variety appeared. Classification of such varieties upto an isomorphism is a too general question which generated subquestions. What are invariants? (degree, genus, geometric invariant theory, ...) What kind of isomorphisms should we consider?

In the course of development, Hilbert's Nullstellensatz and ideal-variety correspondence translate the classification problem into a ring theory. A particular place took localization of a ring as a translation of the global problem to the set of local problems.

As was soon observed, it was necessary to cover the geometry of projective varieties, their basic constructions and subvarieties (e.g. Veronese and Segre embeddings describe special classes of varieties in projective space).

3.2 Now also classical questions of algebraic geometry

In the last century, the development of algebraic geometry formed one of the main flows in mathematics.

Intersection theory studies how algebraic subvarieties of a variety intersect. A starting point is a well known Bézout's theorem (1779). A classical way is to calculate integer numbers, which count (with multiplicity) how many points two subvarieties of certain dimensions meet at, or more generally, how subvarieties intersect. The computation is done in Chow ring of the variety.

Birational geometry deals with isomorphisms of the open subsets of varieties. It leads to the minimal model program which seeks to classify varieties by transforming them into a canonical form (either a minimal

model or a Mori fiber space) through a series of birational transformations like blow-ups and blow-downs.

Resolution of singularities (Hironaka 1964) provides an insight into a world of singularities of algebraic varieties, which are their common part. There are many types, simple (A_n, D_n, E_n) , canonical singularities (Whitney's umbrella, ...) belong to the easiest to describe. Moreover, singularities are important invariants of an algebraic variety from certain point of view. One might roughly say that regularity in any approach ends by some kind of singular situation.

An important shift in the development was a generalization of a "point" which correspond to an ideal. A point in a space started to be viewed as the set of solutions of certain ideal which is dual point of view similar to linear projective geometry.

This lead to looking for functions defining the points. An indispensable tool for exploring such spaces is a line bundle over a curve/variety. It is an algebraic system of lines associated to the curve. Its section is something like a function over the curve. Nowadays, it is a basic tool for a description of algebraic spaces. A wish is to understand whether spaces are isomorphic iff the spaces of their functions are isomorphic.

The classical Riemann-Roch theorem provides a formula for the dimension of the space of sections of a line bundle over a complex curve with prescribed poles and zeroes, genus and degree of the curve

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g + 1.$$

Hence, a classification of all spaces of certain kind started to be a question. A moduli space is a geometric space that parameterizes all varieties (or other objects) of a given type up to an isomorphism. For example, it is known the moduli space \mathfrak{M}_g of algebraic curves of a fixed genus g . Understanding its structure, topology, and the properties of families of varieties over it form a lot of open questions. Moduli space might not be a scheme. We need something more general. This leads to stacks and derived categories.

Since the questions in algebraic geometry are more-less of global nature, the topic of reducing global questions to a series of local questions was addressed by Zariski's main theorem. It explores how local information about a variety, such as local rings and function fields, can help us understand the global structure of the variety.

Many questions of arithmetic number theory were translated into this language which made the are of algebraic geometry vast.

4 Topology is important in the study of geometry

As is generally known in mathematical community, topology plays a fundamental role. One has intuition built on Euclidean topology. Coarse,

but many times good enough is Zariski topology. However, it is not good for cohomology. Hence étale topology was devised. Open sets are arbitrary étalé morphisms to a scheme X , which means the morphisms are flat (locally defined by same relations) and unramified (all preimages are simple – multiplicity 1). Intersections of open sets are the fiber products of the corresponding morphisms.

4.1 Homology and Cohomology

In global study, we work in a set of all subvarieties, spaces of all function, differential forms, polynomials, modules, etc. These structures are usually huge in “number of elements”. The results are required “up to change of something” (e.g coordinates, rational equivalence, group action, isotopy, etc.). The standard technique is to consider equal all the objects which change one into another by some class of a change.

Rational equivalence of the varieties provides the base of the homology and cohomology of the algebraic varieties. Standard calculus (chain complex, exact sequences, homotopy chain complex) of computing with homology groups is applied. The techniques here are comprehensive and well known in general. There are many homology/cohomology (Čech, étale,...) theories leading to derived categories.

5 Where differential and algebraic geometries overlap

Scheme (introduced by Lerray) is a generalization of both algebraic variety and differentiable manifold and contains both algebraic and topological data. Hence, we are able to describe smooth as well as singular situations via algebraic relations. Sheaves are used extensively in both algebraic and differential geometry. They allow the local-to-global transition of many properties.

In differential geometry, a smooth system of vector spaces or modules or groups connected to a manifold in a specific way. In each point we may pick an element of the corresponding object. One can do this locally and smoothly. Such a construction is called sheaf. The fundamental property is that it can be built from enough local information and local information is included in such a description.

In algebraic geometry, (quasi-)coherent sheaves are of interest. They correspond in some sense to modules over algebraic varieties. An important property is that they correspond to the local sections of the modules and are locally finitely generated. Of course, the picking of the values over a point is done locally and in algebraic way.

An examples of a common object in differential geometry of surfaces that is a sheaf is a tangent bundle – all tangent planes to a surface form a sheaf of tangent planes. Moving slightly in a manifold changes the tangent plane slightly in a tangent bundle. The question whether some

set of planes can be tangent bundle of a surface is a subtle one. The way of neighboring has to be specified.

A common example of algebraic sheaf is a sheaf of rings, e.g. coordinate ring of an algebraic variety. It is a sheaf of local rings of regular functions.

Another example of sheaf of ideals provides a description of subschemes. A subscheme Y of a scheme X is defined by a sheaf of ideals (in a neighborhood $U \subset X$, the part of the scheme Y is determined by an ideal $I(U)$ in the local ring $R(U)$ of the scheme X).

5.1 Connecting both disciplines

Complex algebraic geometry and complex manifolds are objects of both disciplines already long time. Holomorphic structure is fairly rigid and brings complex projective varieties close to the corresponding complex manifolds.

There are many theorems known as Serre's GAGA Theorems. This principle provides a correspondence between algebraic geometry over \mathbb{C} (algebraic varieties) and complex analytic geometry (complex manifolds). They show that the category of coherent sheaves on a projective complex algebraic variety is equivalent to the category of coherent analytic sheaves on the corresponding complex manifold.

In differential geometry, de Rham cohomology is used to study the topology of smooth manifolds via differential forms. In algebraic geometry, there is an algebraic analogon known as algebraic de Rham cohomology, which provides a way to study algebraic varieties using similar ideas and techniques.

The forms are grouped together in the space of all forms if they differ by an exact form (it has preimage under exterior derivative). A manageable space structure remains.

As a result, the comparison theorems show how the algebraic de Rham cohomology of a smooth algebraic variety over the complex numbers coincides with the usual de Rham cohomology of the corresponding complex manifold.

In a context of schemes, the usage of this cohomology leads to the important Hirzebruch-Riemann-Roch and Grothendieck-Riemann-Roch theorems, which connect cohomology, characteristic classes, and geometry of a scheme.

Intersection theory and characteristic classes study how subspaces intersect within a variety or manifold. The tools of intersection theory in algebraic geometry (like Chow rings – multiplication is the intersection operation upto a rational equivalence) have analogons in differential geometry, where characteristic classes (such as Chern classes) play a similar role. In differential geometry, these classes (such as Chern, Pontryagin, and Euler classes) are used to study vector bundles and their properties

which are basic tools of description of many properties. In algebraic geometry, Chern classes can also be defined algebraically, hence the approach can be used in the study of vector bundles over algebraic varieties.

6 Conclusion

Roughly speaking, big picture of geometry is covered by both algebraic and analytic methods. Obtained results provide us with understanding and insight on sides of both approaches. Sometimes we might also obtain hints what and how to compute (or not to compute) in practical applications.

The practical realization of constructions and computation is however many times strongly supported by numerical mathematics or combinatorial and statistical computation. All these are techniques of approximation due to the simple fact, that precise computation cannot be done in most of the above mentioned cases for generic data. Hence, the importance of abstract theory as well as computational part of mathematics has to be supported.

Acknowledgement

The author is supported by KEGA 038UK-4/2024.

References

- [1] David Eisenbud and Joe Harris. *3264 and all that—a second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016, pp. xiv+616. ISBN: 978-1-107-60272-4; 978-1-107-01708-5.
- [2] William Fulton. *Intersection theory*. Second. Vol. 2. Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. xiv+470. ISBN: 3-540-62046-X; 0-387-98549-2.
- [3] Phillip August Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley and Sons, 1978.
- [4] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I: Schemes with Examples and Exercises*. 2nd. Springer Studium Mathematik – Master. Wiesbaden: Springer, 2020. ISBN: 978-3-658-12973-7.
- [5] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry II: Sheaves and Cohomology*. Springer Studium Mathematik – Master. Wiesbaden: Springer, 2010. ISBN: 978-3-8348-0676-5.
- [6] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Vol. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.
- [7] Michael Spivak. *The Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1-3*. Publish or Perish, 1970.

- [8] Michael Spivak. *The Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 4-5*. Publish or Perish, 1975.
- [9] Ravi Vakil. *MATH 216: Foundations of Algebraic Geometry*. URL: <https://math.stanford.edu/~vakil/216blog/>.

Paradoxní pohyblivost: realizace grafů a mnohostěny

Paradoxical flexibility: frameworks and polyhedra

Jan Legerský

*Fakulta informačních technologií, ČVUT v Praze
Thákurova 9, 160 00 Praha 6, Česká republika
jan.legersky@fit.cvut.cz*

Abstract. One of the main questions of rigidity theory is whether a bar-joint framework, which is a graph with a realization of its vertices in the d -dimensional space, allows a continuous deformation preserving the distances between adjacent vertices. If yes, the framework is called flexible, otherwise rigid. For a fixed graph, either all generic frameworks are rigid, or all generic ones are flexible. However, non-generic realizations might behave differently yielding for instance paradoxical motions. A few years ago, we have characterized the existence of a (non-generic) flexible realization in the plane for a given graph in terms of special edge colorings, called NAC-colorings. Here we summarize this surprising interplay between combinatorics and geometry and its various extensions shall be presented. We focus also on polyhedra with triangular faces, which can be considered as bar-joint frameworks in the 3-space. In particular, we mention a new result on the smallest flexible polyhedron without self-intersections.

Keywords: rigidity, flexibility, flexible polyhedron, graph realization

Klíčová slova: tuhost, pohyblivost, pohyblivý mnohostěn, realizace grafu

1 Úvod

Strukturální teorie tuhosti (angl. *rigidity theory*) se zabývá otázkou, jestli je danou realizaci grafu v rovině možné spojitě deformovat při zachování délek všech hran, tedy vzdáleností mezi sousedními vrcholy. Podle toho rozlišujeme realizace následovně:

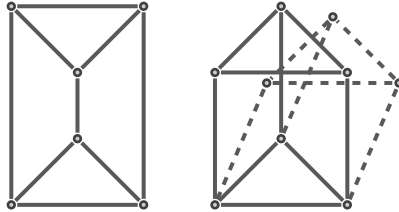
Definice 1.1. *Realizace* grafu $G = (V_G, E_G)$ je zobrazení $\rho : V_G \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že $\rho(u) \neq \rho(v)$ pro každou hranu $uv \in E_G$. *Pohybem* realizace ρ (angl. *flex*) je spojitě zobrazení $t \mapsto \rho_t$, $t \in [0, 1)$ do prostoru realizací grafu G takové, že $\rho_0 = \rho$ a pro každé $t \in [0, 1)$ a hranu $uv \in E_G$ platí

$$\|\rho_t(u) - \rho_t(v)\| = \|\rho(u) - \rho(v)\|.$$

Pohyb je *triviální*, pokud rovnice výše platí pro všechny vrcholy $u, v \in V_G$ a $t \in [0, 1)$. Realizace ρ je *pohyblivá* (angl. *flexible*), jestliže má netriviální pohyb, jinak je *tuhá* (angl. *rigid*).

V definici výše se jedná o realizace grafu v rovině, ale nahrazením \mathbb{R}^2 můžeme samozřejmě uvažovat realizace v prostoru či na sféře.

Je známo, že pro daný graf jsou buď skoro všechny realizace tuhé, nebo jsou skoro všechny realizace pohyblivé. Můžeme tedy mluvit o (*genericky*) *tuhých*, respektive (*genericky*) *pohyblivých* grafech. Graf je *minimálně tuhý* (angl. *minimally rigid*), pokud je tuhý a zároveň odebráním libovolné hrany vznikne graf pohyblivý, příklad je na Obr. 1.



Obr. 1: Graf trojbokého hranolu je minimálně tuhý v rovině, tedy skoro všechny realizace jsou tuhé (vlevo), ale existují i pohyblivé (vpravo).

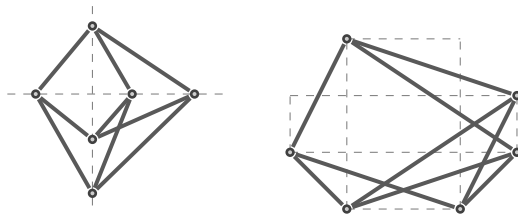
Pollaczek-Geiringer dokázala v roce 1927 následující větu, pomocí které lze charakterizovat tuhé grafy a kterou poté znovu dokázal Laman v roce 1970. Poznamenejme, že charakterizace tuhých grafů realizovaných ve tří a více-dimenzionálním prostoru je dlouho otevřeným problémem.

Věta 1.2 ([14, 18]). *Graf $G = (V_G, E_G)$ je minimálně tuhý v rovině právě tehdy, když $|E_G| = 2|V_G| - 3$ a $|E_H| \leq 2|V_H| - 3$ pro každý podgraf H grafu G s alespoň dvěma vrcholy.*

Zatímco je NP-těžké rozhodnout, jestli je daná realizace tuhá [19], takzvané *pebble game* algoritmy [15] umožňují rozhodnout v polynomiálním čase, jestli je daný graf genericky tuhý.

Naším hlavním tématem je paradoxní pohyblivost, tedy pohyblivé realizace genericky tuhých grafů. Takováto situace může nastat pro speciálně zvolené realizace, jak jde vidět například na Obr. 1. Dále Obr. 2 ukazuje dva typy pohyblivých realizací kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$ navržené Dixonem [7] v roce 1899. O více než sto let později bylo ukázáno, že tento graf žádné jiné prosté pohyblivé realizace nemá [21].

V tomto článku se nejprve zaměříme na charakterizaci grafů, které připouštějí pohyblivou realizaci v rovině (Sekce 2), pomocí jistého obarvení hran. V Sekci 3 se budeme věnovat rotačně a zrcadlově symetrické variantě tohoto problému. Na závěr se posuneme z roviny do prostoru, konkrétně k pohyblivým mnohostěnům. Na ty můžeme také nahlížet do jisté míry jako na realizací grafů.



Obr. 2: Genericky tuhý graf $K_{3,3}$ má dva typy pohyblivých realizací.

Spoluautory zde shrnutých poznatků jsou Sean Dewar, Matteo Gallet, Georg Grasegger a Josef Schicho. Výsledky jsou v článcích [4, 5, 8, 9, 13], odkud jsou také převzaty některé obrázky.

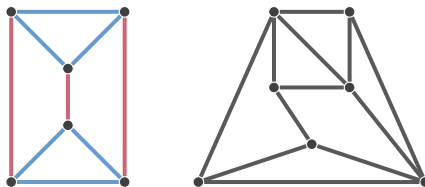
2 Existence pohyblivých realizací

V této části zavedeme obarvení hran, které charakterizuje existenci pohyblivé realizace. Také naznačíme důkaz tohoto tvrzení a uvedeme, jak souvisí s existencí pohyblivé realizace na sféře.

Definice 2.1. Obarvení hran $\delta : E_G \rightarrow \{\text{modrá, červená}\}$ grafu G se nazývá *NAC-obarvení* (angl. *NAC-coloring*¹), jestliže je surjektivní a pro každý cyklus v grafu G platí, že je buď jednobarevný, nebo obsahuje alespoň dvě modré a dvě červené hrany.

Příklad NAC-obarvení je na Obr. 3. Poznamenejme, že existence NAC-obarvení je NP-úplný problém [10]. Nyní můžeme vyslovit kombinatorickou nutnou a postačující podmínku pro existenci pohyblivé realizace.

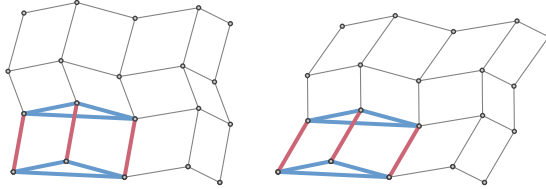
Věta 2.2 ([13]). *Souvislý graf má pohyblivou realizaci v rovině právě tehdy, když má NAC-obarvení.*



Obr. 3: Graf vlevo má až na prohození barev jedno NAC-obarvení, zatímco graf vpravo nemá žádné, a tedy pro něj neexistuje pohyblivá realizace.

¹Zkratka NAC pochází z anglického *No Almost Cycle*.

Náznak důkazu. Má-li graf NAC-obarvení, můžeme jeho vrcholy umístit do mřížky tak, že každá modrá hrana je v rámci jednoho řádku a každá červená v rámci jednoho sloupce (Obr. 4). V mřížce tedy nejsou úhlopříčky a můžeme ji tudíž sklápět, aniž bychom měnili vzdálenost v rámci jednoho sloupce či řádku. Podmínka na cykly zaručuje, že žádné dva sousední vrcholy nejsou umístěny do stejného bodu mřížky (pro nesousední to nastat může).



Obr. 4: Konstrukce pohyblivé realizace z NAC-obarvení grafu.

Naopak máme-li pohyblivou realizaci ρ , uvažujme následující soustavu polynomiálních rovnic pro souřadnice vrcholů x_u, y_u pro $u \in V_G$:

$$\begin{aligned} (x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 &= \lambda_{uv}^2 && \text{pro všechny hrany } uv \in E_G, \\ x_{\bar{u}} &= y_{\bar{u}} = y_{\bar{v}} = 0, \\ x_{\bar{v}} &= \lambda_{\bar{u}\bar{v}} \end{aligned}$$

kde $\lambda_{uv} = \|\rho(u) - \rho(v)\|$ a $\bar{u}\bar{v}$ je libovolně zvolená hrana, kterou fixujeme, abychom vyloučili triviální pohyby. Soustava má nekonečně mnoho reálných řešení, neboť ρ je pohyblivá realizace. Můžeme tedy v množině řešení nad komplexními čísly uvažovat ireducibilní algebraickou křivku \mathcal{M} . Její komplexní těleso funkcí $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ je podílové těleso souřadnicového okruhu křivky \mathcal{M} , což je okruh polynomů v proměnných x_u, y_u , kde $u \in V_G$, modulo ideál křivky \mathcal{M} . Konečně *valuace* komplexního tělesa funkcí $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ je zobrazení $\nu : \mathbb{C}(\mathcal{M}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ takové, že

1. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{C}(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$,
2. $\nu(a+b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{C}(\mathcal{M}) \setminus \{0\}$ takové, že $a+b \neq 0$, a
3. $\nu(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{0\}$.

Využijeme toho, že pracujeme nad \mathbb{C} a pro $uv \in E_G$ definujeme následující funkce, jejichž součin je λ_{uv}^2 :

$$\begin{aligned} W_{u,v} &= (x_u - x_v) + i(y_u - y_v) \\ Z_{u,v} &= (x_u - x_v) - i(y_u - y_v) \end{aligned}$$

Zřejmě pro libovolný (orientovaný) cyklus v grafu G platí $\sum W_{u,v} = 0 = \sum Z_{u,v}$, kde sčítáme přes všechny hrany tohoto cyklu. Jedním ze základních tvrzení o valuacích je fakt, že pokud se suma rovná nule, potom se minimum valuací sčítanců nabývá alespoň dvakrát. V našem případě se nabývá dvakrát i maximum, neboť $\nu(W_{u,v}) = -\nu(Z_{u,v})$ díky vztahu

$$0 = \nu(\lambda(uv)^2) = \nu(W_{u,v}Z_{u,v}) = \nu(W_{u,v}) + \nu(Z_{u,v}).$$

Tudíž obarvení δ definované následovně je NAC-obarvením:

$$\delta(uv) := \begin{cases} \text{červená,} & \text{jestliže } \nu(W_{u,v}) > 0, \\ \text{modrá,} & \text{jestliže } \nu(W_{u,v}) \leq 0. \end{cases}$$

Podrobný důkaz včetně zdůvodnění existence ν je v článku [13]. □

Jeden z výsledků článku [8] lze formulovat následovně:

Věta 2.3 ([8]). *Souvislý graf má pohyblivou realizaci na sféře právě tehdy, když má nezávislý vrcholový řez.*

Připomeňme, že vrcholový řez souvislého grafu je množina vrcholů, jejichž odebráním vzniká nesouvislý graf, a množina vrcholů je nezávislá, pokud neindukuje žádné hrany.

Díky [13, Věta 4.4] dostáváme, že každý souvislý graf, který má pohyblivou realizaci na sféře, má pohyblivou realizaci i v rovině. Zajímavé je, že ne každá pohyblivá realizace na sféře má svoji analogii v rovině: zatímco jediné dva způsoby, jak získat pohyblivou realizaci kompletního bipartitního grafu $K_{3,3}$ jsou naznačeny na Obr. 2, na sféře existuje krom analogií těchto dvou konstrukcí ještě třetí, zvaný *constant angle motion* [8].

3 Symetrické realizace

V této sekci se zaměříme na pohyblivé realizace, které jsou rotačně či zrcadlově symetrické a tato symetrie se zachovává i během jejich pohybu. Po zavedení základních pojmů se budeme věnovat každé symetrii zvlášť.

Definice 3.1. Mějme graf G , který má cylickou podgrupu grupy automorfismů grafu G řádu n takovou, že vrcholy, jejichž orbita má méně než n prvků, jsou invariantní a tvoří nezávislou množinu. Automorfismus ω generující tuto podgrupu nazveme *rotací* grafu. Realizace ρ grafu G je *rotačně symetrická*, jestliže $\rho(\omega(v)) = \Theta\rho(v)$ pro každý vrchol $v \in V_G$, kde Θ je rotační matice o $2\pi/n$.

Definice 3.2. Mějme graf, který má netriviální automorfismus σ takový, že σ^2 je identita. Automorfismus σ nazveme *zrcadlením* grafu. Realizace ρ grafu G je *zrcadlově symetrická*, jestliže $\rho(\sigma v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rho(v)$ pro každý vrchol $v \in V_G$.

Definice 3.3. Rotačně, resp. zrcadlově, symetrická realizace grafu je *rotačně*, resp. *zrcadlově*, *symetricky pohyblivá*, pokud má netriviální pohyb, jehož všechny realizace jsou rotačně, resp. zrcadlově, symetrické.

3.1 Rotační symetrie

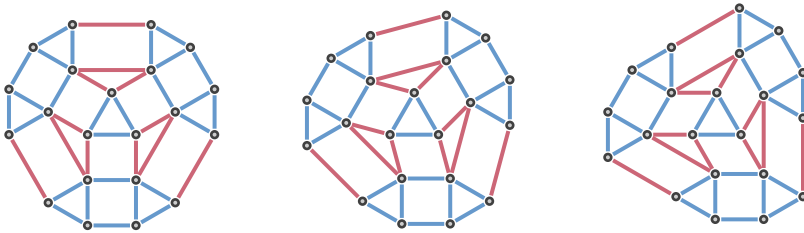
V tomto případě umíme kompletně charakterizovat existenci pohyblivé rotačně symetrické realizace.

Definice 3.4. Necht δ je NAC-obarvení grafu G s rotací ω . *Červená komponenta* je komponenta souvislosti podgrafu $(V_G, \{e \in E_G : \delta(e) = \text{červ.}\})$, analogicky definujeme *modrou komponentu*. Množina $H \subset V_G$ je *částečně invariantní*, pokud existuje $k \in \{2, \dots, n-1\}$ takové, že $\omega^k(H) = H$.

NAC-obarvení δ je *rotačně symetrické*, pokud $\delta(\omega(e)) = \delta(e)$ pro všechny hrany $e \in E_G$ a žádné dvě červené, respektive modré, částečně invariantní komponenty nejsou spojeny hranou.

Soustavu polynomů z náznaku důkazu Věty 2.2 lze upravit tak, aby vynucovala rotační symetrii. Tyto podmínky a upravená konstrukce pohyblivé realizace pak slouží k důkazu následující věty ilustrované na Obr. 5.

Věta 3.5 ([4]). *Souvislý graf má rotačně symetrickou pohyblivou realizaci právě tehdy, když má rotačně symetrické NAC-obarvení.*



Obr. 5: Pohyb grafu odpovídající zobrazenému rotačně symetrickému NAC-obarvení, který je symetrický vůči otočení o 120° .

3.2 Zrcadlová symetrie

Na rozdíl od rotační symetrie, v zrcadlově symetrickém případě musíme uvažovat obarvení třemi barvami, které navíc definujeme ve dvou krocích.

Definice 3.6. Mějme graf G se zrcadlením σ . Obarvení hran $\delta : E_G \rightarrow \{\text{červená, modrá, zlatá}\}$ grafu G se nazývá *pseudo-RS-obarvení*,² pokud:

1. $\{\text{červená, modrá}\} \subseteq \delta(E_G) \subseteq \{\text{červená, modrá, zlatá}\}$,

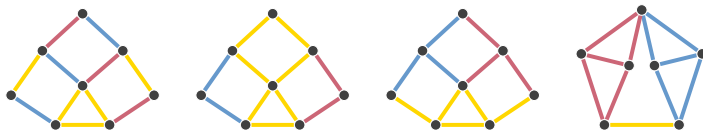
²Zkratka RS pochází z anglického *reflection symmetric*.

2. $\delta(e) = \text{červená} \iff \delta(\sigma(e)) = \text{modrá}$ pro všechny hrany $e \in E_G$, a
 3. přebarvení všech zlatých hran na modro dává NAC-obarvení.
- Cyklus je *téměř modro-červený* obsahuje-li právě jednu zlatou hranu.

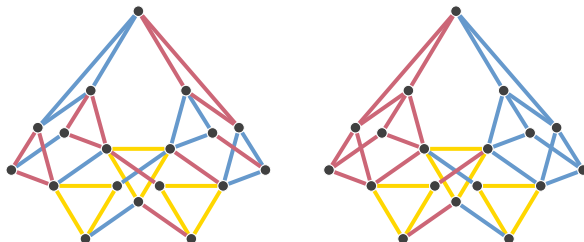
Definice 3.7. Pseudo-RS-obarvení δ grafu G je *RS-obarvením*, pokud

1. (G, δ) nemá žádný téměř modro-červený cyklus, nebo
2. každý téměř modro-červený cyklus má hrany e_1, e_2 stejné barvy takové, že nějaké pseudo-RS-obarvení δ' splňuje $\delta'(e_1) \neq \delta'(e_2)$.

Na obrázcích 6 a 7 jsou příklady (pseudo-)RS-obarvení.



Obr. 6: Pseudo-RS-obarvení, první tři jsou také RS-obarvení.



Obr. 7: Dvě RS-obarvení grafu, které sobě navzájem zaručují splnění podmínky pro téměř modro-červené cykly.

Překvapivě je zrcadlově symetrický případ podstatně komplikovanější než ten rotačně symetrický: neumíme pro něj ukázat podmínku, která by byla zároveň nutná i postačující.

Věta 3.8 ([5]). *Jestliže má graf zrcadlově symetrickou realizaci, potom má RS-obarvení. Naopak má-li graf RS-obarvení bez téměř modro-červených cyklů, pak má zrcadlově symetrickou pohyblivou realizaci.*

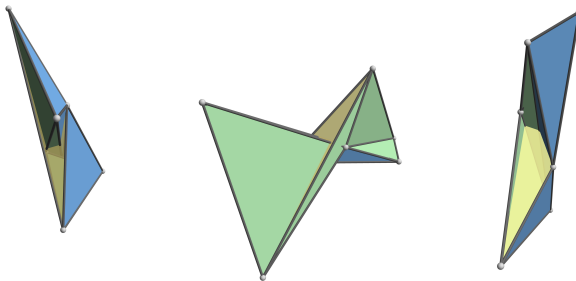
Konstrukce pohyblivé realizace je možná v případě absence téměř modro-červených cyklů vylepšením obecné konstrukce, ale při její aplikaci na téměř modro-červený cyklus dochází ke splynutí sousedních vrcholů, což nedovolujeme (je to důležité při použití valuace). Pro graf na Obr. 7 pohyblivou realizaci zkonstruovat umíme [5, Věta 5.5], ale použitý přístup zdaleka nepokrývá všechny grafy, které mají RS-obarvení.

4 Pohyblivé mnohostěny

Nyní se zaměříme na realizace v prostoru pro grafy, které lze získat jako kostru konvexního mnohostěnu s trojúhelníkovými stěnami. Pohyblivost mnohostěnu je dlouho studovaným tématem: Cauchy [2] v roce 1813 ukázal, že konvexní mnohostěny jsou tuhé. Bricard [1] popsal tři typy pohyblivých realizací osmistěnu v roce 1897. V roce 1974 Gluck [11] dokázal, že skoro všechny realizace mnohostěnu jsou tuhé. Connelly [3] zkonstruoval v roce 1978 první pohyblivý mnohostěn, který je *vložený*, neboli každý průnik dvou stěn je triviální, tedy je hranou či vrcholem. Jen o rok později našel Steffen [20] vložený pohyblivý mnohostěn o pouhých devíti vrcholech. Otázka, jestli existuje nějaký menší vložený pohyblivý mnohostěn byla zúžena v roce 2008 Maksimovem [16] na jeden jediný otevřený případ: mnohostěn, který získáme z pětibokého dvojjehlanu přidáním nového vrcholu tak, že rozdělíme jednu stěnu na tři.

Protože rozdělení jedné stěny na tři nezmění pohyblivost, zaměřili jsme se na pohyblivé realizace pětibokých dvojjehlanů. Inspirováni článkem [17] jsme ukázali, jak splením dvou určitých pohyblivých osmistěnu získat pohyblivý pětiboký dvojjehlan. Díky této konstrukci lze najít jeho realizaci takovou, že všechny netriviální průniky stěn se odehrávají v jedné stěně, Obr. 8. Rozdělením této stěny na tři se můžeme všem nežádoucím průnikům vyhnout a získat tak vložený pohyblivý mnohostěn s pouhými osmi vrcholy.

Věta 4.1 ([9]). *Pětiboký dvojjehlan s jednou stěnou rozdělenou na tři má pohyblivou realizaci v prostoru, ve které se stěny protínají pouze v hranách či vrcholech.*



Obr. 8: Různé pohledy na pohyblivý pětiboký dvojjehlan, jehož všechny netriviální průniky stěn zahrnují žlutou stěnu.

5 Závěr

V článku jsme shrnuli některé nedávné poznatky o existenci pohyblivých realizací grafů v rovině včetně dvou symetrií. Dodejme, že je lze rozšířit i na nekonečné grafy [6] a pro realizace tvořené trojúhelníky a rovnoběžníky může existence NAC-obarvení určovat, jestli je přímo daná realizace pohyblivá, nejen jestli nějaká existuje [12].

Pohyb vloženého mnohostěnu na osmi vrcholech popsany v [9] je velmi limitovaný, ve smyslu, že brzy dojde k netriviálnímu průniku stěn. Do budoucna by bylo zajímavé zkonstruovat realizaci s větším rozsahem pohybu.

Poděkování

Článek vznikl za podpory Grantové agentury České republiky, projekt číslo 22-04381L.

Literatura

- [1] Raoul Bricard. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. *Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série*, 3:113–148, 1897. Anglický překlad dostupný na [arXiv:1203.1286](https://arxiv.org/abs/1203.1286).
- [2] Augustin Cauchy. Recherche sur les polyèdres — premier mémoire. *Journal de l'École Polytechnique*, 9:66–86, 1813. Dostupné na <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f13>.
- [3] Robert Connelly. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 47:333–338, 1977. Dostupné na <https://eudml.org/doc/103949>. doi:10.1007/BF02684342.
- [4] Sean Dewar, Georg Grasegger a Jan Legerský. Flexible placements of graphs with rotational symmetry. *2nd IMA Conference on Mathematics of Robotics (IMA 2020)*, pages 89–97, 2022. doi:10.1007/978-3-030-91352-6_9.
- [5] Sean Dewar, Georg Grasegger a Jan Legerský. Constructing reflection-symmetric flexible realisations of graphs, 2024. [arXiv:2408.06928](https://arxiv.org/abs/2408.06928).
- [6] Sean Dewar a Jan Legerský. Flexing infinite frameworks with applications to braced Penrose tilings. *Discrete Applied Mathematics*, 324:1–17, 2023. doi:10.1016/j.dam.2022.09.002.
- [7] Alfred C. Dixon. On certain deformable frameworks. *Messenger*, 29(2):1–21, 1899.
- [8] Matteo Gallet, Georg Grasegger, Jan Legerský a Josef Schicho. On the Existence of Paradoxical Motions of Generically Rigid Graphs on the Sphere. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(1):325–361, 2021. doi:10.1137/19M1289467.
- [9] Matteo Gallet, Georg Grasegger, Jan Legerský a Josef Schicho. Pentagonal bipyramids lead to the smallest flexible embedded polyhedron, 2024. [arXiv:2410.13811](https://arxiv.org/abs/2410.13811).

- [10] Dániel Garamvölgyi. Global rigidity of (quasi-)injective frameworks on the line. *Discrete Mathematics*, 345(2):112687, 2022. doi:10.1016/j.disc.2021.112687.
- [11] Herman Gluck. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. *Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974)*, volume 438 of *Lecture Notes in Math.*, pages 225–239, 1975. doi:10.1007/BFb0066118.
- [12] Georg Grasegger a Jan Legerský. Flexibility and rigidity of frameworks consisting of triangles and parallelograms. *Computational Geometry*, 120:102055, 2024. doi:10.1016/j.comgeo.2023.102055.
- [13] Georg Grasegger, Jan Legerský a Josef Schicho. Graphs with Flexible Labelings. *Discrete & Computational Geometry*, 62(2):461–480, 2019. doi:10.1007/s00454-018-0026-9.
- [14] Gerard Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, 4:331–340, 1970. doi:10.1007/BF01534980.
- [15] Audrey Lee a Ileana Streinu. Pebble game algorithms and sparse graphs. *Discrete Mathematics*, 308(8):1425–1437, 2008. doi:10.1016/J.DISC.2007.07.104.
- [16] I. G. Maksimov. Nonflexible polyhedra with a small number of vertices. *Journal of Mathematical Sciences*, 149(1):956–970, 2008. doi:10.1007/s10958-008-0037-9.
- [17] Gerald D. Nelson. Extending Bricard Octahedra, 2010. doi:10.48550/arXiv.1011.5193.
- [18] Hilda Pollaczek-Geiringer. Über die Gliederung ebener Fachwerke. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 7:58–72, 1927. doi:10.1002/zamm.19270070107.
- [19] James Saxe. Embeddability of weighted graphs in k -space is strongly NP-Hard. *Proc. 17th Allerton Conf. in Communications, Control, and Computing*, pages 480–489, 1979.
- [20] Klaus Steffen. A symmetric flexible Connelly sphere with only nine vertices, 1978. Rukopis.
- [21] Dominic Walter a Manfred L. Husty. On a nine-bar linkage, its possible configurations and conditions for paradoxical mobility. *12th World Congress on Mechanism and Machine Science, IFToMM 2007*, 2007.

CONTRIBUTED TALKS

Porovnání českého a švédského vzdělávacího programu se zaměřením na výuku geometrie

Comparison of Czech and Swedish curricula with a focus on geometry education

Eliška Beránková

*Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
17. listopadu 1192/12, Olomouc 779 00, Česká republika
e-mail: eliska.berankova01@upol.cz*

Abstract. The aim of this paper is to point out the differences in the teaching of geometry in Sweden and the Czech Republic. Our country has a lot in common with Sweden, but at the same time we can find some differences between them, not only cultural differences, but also differences in mathematics teaching. To begin with, the curricula for primary and secondary schools in both countries will be compared, with a focus on the teaching of geometry. The primary school curriculum in Sweden was revised in 2022 and in the Czech Republic the new version is being finalised, so we can compare the current trends in both countries. As for the secondary school curriculum, I will compare the Czech RVP for grammar schools with the Natural Science programme, which is one of the most frequently chosen secondary school curricula in Sweden. The second aim of the paper is then to present some interesting high school geometry problems that appear in Swedish final exams.

Keywords: geometry, teaching of geometry, mathematics, czech curricula, swedish curricula

Klíčová slova: geometrie, výuka geometrie, matematika, český vzdělávací program, švédský vzdělávací program

1 Úvod

Tento příspěvek se bude věnovat porovnání výuky geometrie ve Švédsku a v České republice. Naše země má se Švédskem mnoho společného, ale současně mezi nimi můžeme najít i nějaké rozdíly, a to nejen kulturní, ale i rozdíly ve výuce matematiky. Na začátek budou porovnány vzdělávací programy pro základní i střední školy v obou zemích se zaměřením na výuku geometrie. Vzdělávací program pro základní školy [4] byl ve Švédsku revidován v roce 2022 a v České republice je nová verze [3] právě dokončována, takže můžeme porovnat aktuální trendy v obou zemích. Co se týče středoškolského vzdělávacího programu, bude porovnáváno české RVP pro gymnázia [1] se studijními plány programu Natural Science [4], který je jedním z nejčastěji volených studijních oborů ve Švédsku. Druhým cílem příspěvku je pak představit několik zajímavých středoškolských geometrických úloh, které se objevují ve švédských závěrečných testech.

2 Porovnání vzdělávacích programů

Na začátek si ve stručnosti představíme švédský vzdělávací systém. Povinná školní docházka začíná ve Švédsku v 7 letech a trvá devět let. V tomto ohledu je systém srovnatelný s Českou republikou. Nicméně ve Švédsku se základní škola dělí na 3 stupně vždy po třech letech.

Střední škola [7] trvá ve Švédsku 3 roky a studenti si mohou vybrat z 18 studijních programů. Na výběr mají 12 praktických oborů (srovnatelné s našimi učňovskými obory) a 6 vyšších programů, které připravují studenty k dalšímu vysokoškolskému studiu (Business Management and Economics, Arts, Humanities, Natural Science, Social Science, Technology).

Co se týče výuky matematiky, tak ta se na střední škole vyučuje v 5 jednoletých kurzech. V průběhu jednoho ročníků tak může student mít zapsaných více kurzů matematiky najednou. Praktické obory mají povinné 2-3 kurzy a vyšší programy 3-5. Dále jsou jednotlivé kurzy matematiky rozděleny ještě na 3 úrovně a-c, kde kurz c je nejvíce pokročilý. Největší množství kurzů matematiky musí absolvovat studenti oboru Technology a Natural Science.

2.1 Vzdělávací programy pro základní školy

Na následujících řádcích si můžeme detailně prohlédnout vzdělávací program z matematiky pro jednotlivé stupně základních škol jak ve Švédsku [4], tak i v České republice [2].

ZŠ – Švédsko (1.-3. ročník)

- běžná slova pro popis polohy objektů a prvků v prostoru.
- základní geometrické dvourozměrné objekty a koule, kužel, válec a kosočtverec. Vlastnosti těchto objektů a jejich vztahy. Konstrukce geometrických objektů.
- porovnávání a odhadování veličin. Měření délky, hmotnosti, objemu a času pomocí běžných moderních a starých měrných jednotek.
- poměr v jednoduchém zmenšení a zvětšení.
- symetrie v každodenním životě a způsoby konstrukce symetrie.

ZŠ – Švédsko (4. -6. ročník)

- základní geometrické dvourozměrné a trojrozměrné objekty a jejich vlastnosti a vzájemné vztahy. Konstrukce geometrických objektů s digitálními nástroji i bez nich.
- porovnávání, odhad a měření délky, plochy, hmotnosti, objemu, času a úhlu s použitím standardizovaných měrných jednotek a souvisejících záměn jednotek.
- metody určování a odhadování obvodu a plochy různých dvourozměrných geometrických útvarů.
- poměr při zmenšování a zvětšování a použití poměru v situacích zaměřených na žáka.
- symetrie v rovině a způsoby konstrukce symetrie.

ZŠ – Švédsko (7. -9- ročník)

- základní geometrické dvourozměrné a trojrozměrné objekty a jejich vlastnosti a vzájemné vztahy. Konstrukce geometrických objektů s digitálními nástroji i bez nich.
- porovnávání, odhad a měření délky, plochy, hmotnosti, objemu, času a úhlu s použitím standardizovaných měrných jednotek a souvisejících záměn jednotek.
- metody určování a odhadování obvodu a obsahu různých dvourozměrných geometrických útvarů.
- poměr při zmenšování a zvětšování a použití poměru v situacích zaměřených na žáka.
- symetrie v rovině a způsoby konstrukce symetrie.

ZŠ – ČR (1. – 5. ročník)

- základní útvary v rovině – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

ZŠ – ČR (6. -9. ročník)

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta
- prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

Ve švédském vzdělávacím programu si můžeme všimnout, že je zde kladen důraz na využívání digitálních nástrojů již od 4. ročníku. Také je zde zmíněno používání i starších měrných jednotek. Oba aspekty jsou zahrnuté v připravované revizi RVP. Zajímavý je také následující bod z kurikula pro první tři ročníky ve Švédsku: „*Základní geometrické dvourozměrné objekty a koule, kužel, válec a kosočtverec*“, z něhož není srozumitelné, co se myslí základními geometrickými dvourozměrnými útvary. Poslední věc, co stojí za zmínku u švédského kurikula je výpočet objemu těles již během prvních 3 let studia, zatímco čeští studenti počítají objem většiny těles až na druhém stupni.

V českém kurikulu můžeme vyzdvihnout zaměření na prostorové objekty a práci s nimi. Dále se v porovnání se Švédskem vyučují na základních školách

v České republice metrické vlastnosti v rovině - druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta. A dalším tématem, které je navíc obsažené v českém kurikulu jsou konstrukční úlohy zaměřené na množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice).

2.2 Vzdělávací programy pro střední školy

Dále si uvedeme výstupy z geometrie ze švédských středoškolských kurzů [4] na úrovni c. Kurz 4 už není členěn do úrovně a kurz 5 zde není zahrnut, protože se v něm geometrie nevyučuje. Pro porovnání si uvedeme výstupy z RVP pro gymnázia [1].

Kurz 1c – Švédsko

Trigonometrie a vektory

- Sinus, kosinus a tangens. Pojem inverzní funkce v kontextu goniometrických funkcí.
- Metody výpočtu vzdáleností a úhlů v souřadnicových systémech a v pravoúhlých trojúhelnících.
- Vektor. Zobrazení vektorů v souřadnicových systémech a zapsané v souřadnicovém tvaru.
- Metody výpočtů s vektory, včetně sčítání, odčítání, výpočtu absolutních hodnot a násobení skaláry.

Kurz 2c – Švédsko

Logika a geometrie

- Pojmy implikace a ekvivalence.
- Pojmy definice, věta a důkaz.
- Použití a zdůvodnění základních klasických vět geometrie o úhlech a rovinných útvech a Pythagorovy věty, včetně příkladů zahrnujících výpočty v souřadnicových systémech.

Kurz 3c – Švédsko

Trigonometrie

- Pojem jednotkové kružnice.
- Definice trigonometrických pojmů z jednotkové kružnice.
- Důkaz a použití sinové a kosinové věty.

Kurz 4 - Švédsko

Trigonometrie

- Úpravy trigonometrických výrazů. Důkaz a práce s trigonometrickými vzorci, včetně trigonometrických a sčítacích vzorců.
- Vlastnosti trigonometrických funkcí, včetně periody. Metody určování trigonometrických funkcí. Metody řešení trigonometrických rovnic.
- Pojem radián.
- Zdůvodnění a práce s pravidly pro derivace funkcí sinus, kosinus a tangens.

- Zdůvodnění a odvození metod pro určování integrálů funkcí sinus a kosinus.

RVP G – ČR

- Geometrie v rovině – rovinné útvary (klasifikace), obvody a obsahy; shodnost a podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta a věty Euklidovy; množiny bodů dané vlastnosti; úhly v kružnici, shodná zobrazení (osová a středová souměrnost, posunutí, otočení), stejnolehlost, konstrukční úlohy.
- Geometrie v prostoru – polohové a metrické vlastnosti; základní tělesa, povrchy a objemy, volné rovnoběžné promítání.
- Trigonometrie – sinová a kosinová věta; trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku.
- Analytická geometrie v rovině – vektory a operace s nimi; analytická vyjádření přímky v rovině, kuželosečky (kružnice, elipsa, parabola a hyperbola).

Na základě předložených obsahů vzdělávacích programů si můžeme povšimnout, že část učiva kurzu 2c „*Použití a zdůvodnění základních klasických vět geometrie o úhlech a rovinných útvarech a Pythagorovy věty.*“ je v českých školách vyučována již na základních školách. Dále se na švédských středních školách nevyučují konstrukční úlohy ani stereometrie. Na druhou stranu, vzhledem k pokročilé úrovni analýzy v rámci výuky na švédských středních školách, se švédští žáci již v rámci středoškolského učiva seznámí s derivováním a integrováním goniometrických funkcí, což je učivo, které se objevuje převážně jen na českých průmyslových školách a pak ve volitelných seminářích na gymnáziích.

Oproti švédskému kurikulu se v českém RVP pro gymnázia objevují navíc kapitoly jako Euklidovy věty, množiny bodů dané vlastnosti, stejnolehlost a konstrukční úlohy. Jak už bylo zmíněno výše, na českých středních školách se žáci věnují i geometrii v prostoru, a také se čeští žáci učí více do hloubky problematiku analytické geometrie, kde se seznámí s kuželosečkami.

2.3 Vybrané úlohy z geometrie

V této podkapitole zmíníme několik úloh ze závěrečných testů z roku 2022, které žáci psali po absolvování kurzu 2c a 3c. Zadání úloh nebude uvedeno z důvodu nedostatku místa v příspěvku, ale jsou dohledatelné v odkazech uvedených ve zdrojích. U zadání najdete také vzorové řešení švédských studentů.

První úloha číslo 23 ([5], str. 4) navazuje na obsah kurzu 2c, kde se v rámci geometrie probírá téma „definice, věta a důkaz“ a po žácích se chce dokázat vztah mezi jednotlivými úhly nekonvexního čtyřúhelníku. Druhá úloha číslo 28 vyžaduje využití podobnosti trojúhelníků ([5], str. 6).

V testu z kurzu 3c můžeme najít úlohu číslo 24 ([6], str. 3), kde je ověřována znalost sinové a kosinové věty. Dále můžeme zmínit úlohu číslo 28 ([6], str. 5), která už vyžaduje znalost a aplikaci derivací v průběhu řešení geometrické úlohy.

3 Závěr

V závěru můžeme konstatovat, že české kurikulum je vzhledem k výuce geometrie obsáhlejší než švédské. Také české středoškolské kurikulum obsahuje výuku stereometrie, která se na švédských středních školách vůbec nevyučuje. Ve Švédsku je kladen větší důraz na výuku funkcí a modelování situací, což lze vidět i v závěrečných testech. Při výuce geometrie se ve Švédsku již na prvním stupni dle daného kurikula využívají digitální technologie, což je směr, který můžeme zaznamenat i v připravované revizi vzdělávacího programu pro základní školy.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu Ukazatel P – pedagogické studijní programy 2024 PřF UPOL.

Literatura

- [1] MŠMT. 2022. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. [online]. [cit. 2024- 09-07]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/RVPG-2007-07_final.pdf
- [2] MŠMT. 2023. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online]. [cit. 2024-09-08]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_cista_verze.pdf
- [3] *Revize RVP ZV*. [online] [cit. 2024-09-03] Dostupné z: <https://prohlednout.rvp.cz/zakladni-vzdelavani/vzdelavaci-oblasti/mja/mat>
- [4] *Skolverket* [online]. [cit. 2024-08-30]. Dostupné z: <https://www.skolverket.se/>
- [5] *Skolverket*. 2022. Nationella prov i Matematik 2c [online]. [cit. 2024-08-30] Dostupné z: <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma2c-vt22-Eng.pdf>
- [6] *Skolverket*. 2022. Nationella prov i Matematik 3c [online]. [cit. 2024-09-04] Dostupné z: <https://arkiv.edusci.umu.se/np/np-2-4-prov/Ma3c-vt22-Eng.pdf>
- [7] *Skolverket*. 2011. Overview of the Swedish upper secondary school. [online] [cit. 2024-08-28] Dostupné z: <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a659a16/%201553964183391/pdf2748.pdf>

Origami Tessellations

Stanislava Čečáková, Dana Kolářová

*Dept. of load-bearing structures, Fac. of Architecture,
Czech Technical University
Thákurova 9, 166 34 Prague 6, Czech Republic
email: cecaksta@fa.cvut.cz, kolarova@fa.cvut.cz*

Abstract. This article concentrates on a project that aims to provide our students with a fresh perspective on the world of geometry surrounding us. Origami tessellations are made from a single piece of paper, which is folded in a repeating pattern with flatly overlapped facets. Their construction combines elements of design with the use of geometry and mathematics. In addition, the topic strengthens knowledge of wallpaper symmetry groups and tessellations in general. Students work with inexpensive material that can be simply folded to create variations of colour shades and shapes. To achieve a good result, students need to be familiar with the basic geometric principles of plane tessellations and need to be able to work with paper carefully (origami).

Keywords: Ornament, origami, tessellations, wallpaper symmetry group

1 Introduction

When assigning course projects in the subject of descriptive geometry at the Faculty of Architecture, we aim to seek out topics which shed light onto the world of geometry around us, perhaps in a slightly different way than is typical within the realm of classical teaching. Origami tessellations provide the perfect challenge. The hands-on experience of folding the paper allows students to directly observe the geometric structure they are creating and thus gain a deeper understanding. Furthermore, this method may help them to visualize the transition from 2D to 3D. In addition, origami tessellations incorporate a use of ornamental patterns, knowledge of the general principles of tessellations, and teach students to work with great precision.

2 Historical background

The history of folding paper dates back to the 7th century, when the invention of paper reached Japan, soon followed by the adoption of this tool in teaching. More recently, paper folding was used, for example, by the Bauhaus school in the 1920s to prototype designs. As the concept of origami developed, so did its use. In the 1960s, Shuzo Fujimoto, a Japanese chemistry teacher, was the first to explore twist-fold tessellations in a systematic way, coming up with dozens of patterns and establishing the genre in the mainstream origami world. Around the same time, Ron Resch patented some tessellation patterns as part of his explorations into kinetic sculpture and developable surfaces. Since then many artists have followed in their footsteps, for example, Chris Palmer: an artist who

has explored tessellations extensively, finding ways to create detailed origami tessellations out of silk. An advancement in the digitalization of creation was made by Robert Lang and Alex Bateman, who developed a computer program to generate origami tessellations.

A summary of basic axioms for folding paper emerged in the 1980s, owed to French mathematician Jacques Justin, Japanese-Italian mathematician Humiaki Huzita, Japanese mathematician Koshiro Hatori and American physicist Robert Lang.

Origami may be used to solve a range of mathematical problems: for example, to determine the square or cube root of a number, or in problems involving a trisection of angles, among others.

Folding encourages the development of spatial and geometrical thinking, as well as fostering creativity.

„Origami tessellations are geometric designs folded from a single sheet of paper, creating a repeating pattern of shapes from folded pleats and twists. Tessellated origami pieces range from simple square tiling to extremely intricate, complex pieces inspired by Islamic art. Tessellated shapes can form everything from twisted architectural flourishes to realistic faces.“
(Eric Gjerde, 2009)

3 Examples of course projects produced by students at FA CTU

Students were given the task of creating a basic origami tessellation and assigning it into one of 17 categories of wallpaper patterns. Finally, through making modifications, they altered the resulting type of ornament. To determine the type of ornament, the students referred to a table provided to them through electronic teaching resources. The system categorizes ornaments based on their symmetry.

Origami tessellations were always created using either a triangle or square-based grid.

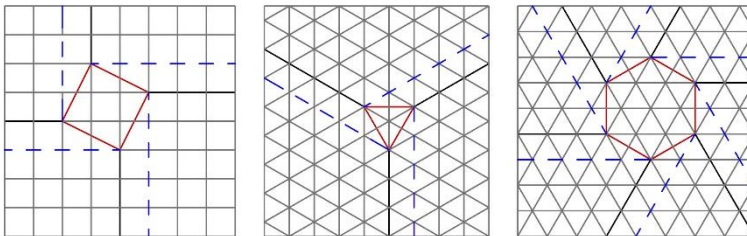


Fig. 1: Examples of used networks (Čečáková)

2. PŘEDSTAVENÍ OBRAZCE – ČTVERCOVÝ ZÁKRUT

Pro vytvoření jakéhokoli obrazce origami tesselace je potřeba si připravit trojúhelníkovou nebo čtvercovou síť. Obrázec „čtvercový zákrut“ se skládá z čtvercové sítě. V úklade je zkratkové schématický postup skládání různých velikých čtvercových zákrutů na papíře s řídící čtvercovou sítí. Tlusté čáry představují přehyby a čárkované záhyby.

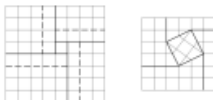
MALÝ ČTVERCOVÝ ZÁKRUT

Najdeme střed čtvercové sítě a připravíme si jednotlivé přehyby a záhyby podle schématu. Pak vše přiložíme společně a vytvoří se požadovaný obrazec.



STŘEDNÍ ČTVERCOVÝ ZÁKRUT

Znovu najdeme střed čtvercové sítě, ale tentokrát si vybereme jeden z 4 čtverců kolem středu. Další postup je identický a finální zákrut se nám zobrazí nevycentrovaný.



VELKÝ ČTVERCOVÝ ZÁKRUT

Zde se již postup od předchozích zákrutů odvíjí a obdobně měříme vytvářet i dalších větší čtvercové zákruty.



2

3. VYTVOŘENÍ ORIGAMI TESSELACÍ

Pro vytvoření 3 odlišných tesselací slabších se stejných obrazců jsem pokusil použít čtvercovou síť 32x32. Třemi různými způsoby jsem kombinoval a spojoval různé veliké čtvercové zákruty. Tesselace jsou následně vyfotografovány proti světlu.

1. TESSELACE

Tesselace vznikla kombinací malých a velkých čtvercových zákrutů. Každý zákrut je spojen se 4 odlišnými zákruty, které jsou kolem něj posouvány o 90°.



2. TESSELACE

V této tesselaci se do nekonečna opakují páry malých a středních zákrutů. Každý zákrut je spojen se 3 stejnými zákruty a jedním odlišným.



3. TESSELACE

Tato tesselace je tvořena pouze ze středních zákrutů, které ale byly skládány z obou stran papíru. Každý zákrut je spojen se 4 dalšími zákruty vždy na opačné straně papíru.



3

4. ANALÝZA SYMETRIE – TAPETOVÉ VZORY

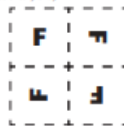
Tapetový vzor je druh ornamentu, u kterého se nějaká jeho část opakuje ve dvou na sobě nezávislých směrech. Obsahuje 1 základní buňku, která se rotací, osovou souměrností, translací a jejich kombinací opakuje a vytváří prostor bez mezer a přeháně. Všechny kombinace vzniká kolem 17 skupin (tříd), kam lze každý tapetový vzor zařadit.

1. TESSELACE – TŘÍDA P4

Tesselace 1 odpovídá třídě P4, která rotuje základní buňku podle jejího vrcholu vždy o 90° a následně vytvořeným čtvercem vyplňuje plochu. V půlce každé strany leží střed rotace z třídy, nestyluje se zde osová souměrnost.



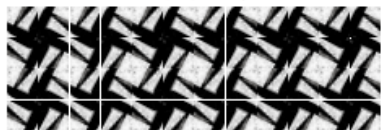
Schéma struktury třídy P4



Základní buňka 1. tesselace



Rozmnožená základní buňka 1. tesselace podle pravidel třídy P4



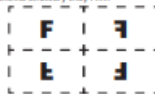
4

2. TESSELACE – TŘÍDA PMM

Každá strana základní buňky třídy PMM je zákrutem osou osově souměrností. Ve všech vrcholech leží střed rotace z třídy (spo 180°).



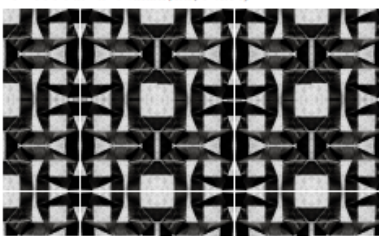
Schéma struktury třídy PMM



Základní buňka 2. tesselace



Rozmnožená základní buňka 2. tesselace podle pravidel třídy PMM



5

Fig. 2: An example of a course project produced by a first-year student of FA CTU Antonín Vitoušek – classification of an ornamental pattern in models produced with its use

Our students mostly based their work on the publications of Eric Gjerde (Gjerde, 2009) and video instructions from the portal “gatheringfolds”. Photos of other models are published here:

<https://media.cvut.cz/cs/foto/20240627-origami-tessellations>

4 Conclusion

The topic of origami tessellations was met with positive feedback from the students. The possibilities for exploration in the field of origami tessellations have not been depleted: so far, we have not yet created a representation of each of the 17 types of ornament. The students’ completed projects will be displayed at the exhibition Archigami in the “Galerie Na ochozu” at FA CTU.

References

- [1] BEN-ARI, Mordechai, 2022. The Axioms of Origami. In: *Mathematical Surprises* [online]. Cham: Springer, s. 113-130 [cit. 2024-09-02]. ISBN 978-3-031-13566-8. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-031-13566-8_10
- [2] KOLÁŘOVÁ, Dana. Teselace rovinné i prostorové. *Elektronická skripta* [online]. Praha: FA ČVUT, 1-20 [cit. 2024-09-02]. Dostupné z: https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-i-ii/dg_elskripta/teselace/teselace-kolarova.pdf
- [3] *Gatheringfolds* [online]. [cit. 2024-09-02]. Available at: <https://gatheringfolds.com/>
- [4] QUINLAN, Rachel, 2023. Interchangeable Origami Wallpaper Patterns. In: *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Art, Music, Architecture, Culture* [online]. Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing, 119--126 [cit. 2024-09-02]. ISBN 978-1-938664-45-8. ISSN 1099-6702. Available at: <http://archive.bridgesmathart.org/2023/bridges2023-119.html>
- [5] GJERDE, Eric, 2009. *Origami Tessellations: Awe-Inspiring Geometric Designs*. A K Peters/CRC Press. ISBN 978-1568814513.
- [6] YODER, Madonna, 2023. Design Equations for Grid-Based Origami Tessellations. In: *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Art, Music, Architecture, Culture* [online]. Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing, 127--134 [cit. 2024-09-02]. ISBN 978-1-938664-45-8. ISSN 1099-6702. Available at: <http://archive.bridgesmathart.org/2023/bridges2023-127.html>

Chyba ve výuce stereometrie

Error in teaching stereometry

Věra Ferdiánová, Martin Plinta

*Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
Mlýnská 5, Ostrava, Česká republika
email: vera.ferdianova@osu.cz, martin.plinta.s01@osu.cz*

Abstract. Working with error in teaching is a powerful pedagogical tool that finds its application not only in mathematics but also in other disciplines. This paper focuses on the specifics of teaching stereometry, which tends to be challenging for many students, mainly due to their lack of spatial imagination. Students often feel that despite knowing the procedures, they may not be successful, which can lead to a decrease in their self-confidence and motivation. Errors in teaching, whether teacher or student, can have a significant psychological effect. If a teacher makes a mistake that is detected by students, it can boost their confidence and bring them closer to the teacher as a person who is also fallible. Moreover, discovering mistakes provides students with a sense of achievement and can be used as a tool to increase their interest in the subject. In this paper, we will focus on specific examples of student errors in stereometry and present methods to effectively use these errors to develop spatial imagination and improve overall understanding of stereometric concepts.

Keywords: Error, stereometry

Klíčová slova: Chyba, stereometrie

1 Úvod

Výuka stereometrie představuje náročnou oblast geometrie, která vyžaduje u žáků rozvoj prostorové představivosti a schopnost pracovat s trojrozměrnými objekty. Žáci se s prostorovou geometrií setkávají již na základní škole, přičemž na středních školách se výuka dále prohlubuje, zejména v tématech, jako jsou objemy, povrchy a řezy těles. Rámcové vzdělávací programy však ne vždy dostatečně specifikují náročnost těchto témat, což může vést k tomu, že jim není věnována dostatečná pozornost. Analýza státních přijímacích zkoušek a maturit (Plinta, 2024) ukazuje, že stereometrické úlohy jsou zastoupeny jen okrajově, což může negativně ovlivnit přípravu studentů. Tento příspěvek se zaměřuje na problematiku chyb ve výuce stereometrie, především v oblasti řezů těles, kde často dochází k chybám při vizualizaci, zejména v souvislosti s volným rovnoběžným promítáním. A proto těchto chyb chceme využít i jako možný nástroj pro učitele.

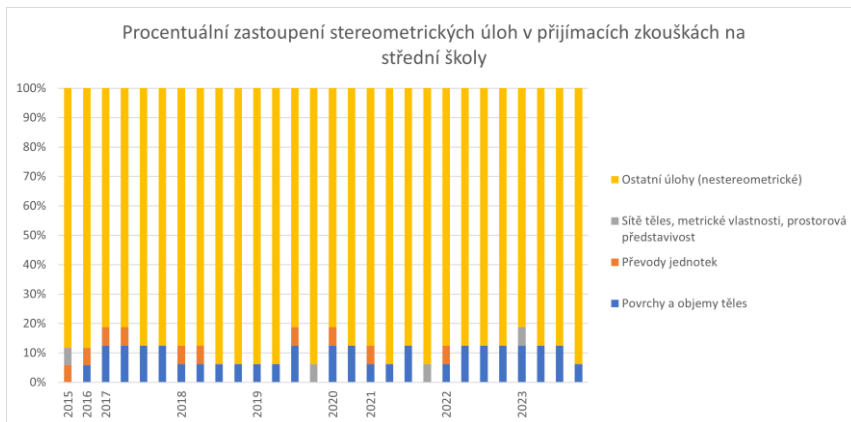
2 Aktuální stav ve výuce stereometrie

Žáci se poprvé setkávají s prostorovou geometrií již v mateřské školce a následně na prvním stupni základní školy, jak uvádí Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV). V rámci očekávaného výstupu M-3-3-01 by měli žáci rozpoznat, pojmenovat, vymodelovat a popsat základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa, přičemž se v reálném světě učí nacházet jejich reprezentace. Mezi základními tělesy, se kterými se žáci setkávají, jsou například kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel a válec. Na druhém stupni základní školy se výuka prostorové geometrie rozšiřuje. Žáci se učí tělesa nejen charakterizovat a načrtnout, ale také sestrojovat sítě základních prostorových útvarů. Očekává se, že zvládnou nejen načrtnout obraz jednoduchých těles v rovině, ale také odhadnout a vypočítat jejich objem a povrch. RVP ZV zde zanechává školám volnost ve výběru konkrétních těles, na kterých budou tyto dovednosti žáků rozvíjeny. Na střední škole se žáci setkávají s prostorovou geometrií v širším rozsahu. Podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G) pronikají hlouběji do vlastností prostorových útvarů a často při řešení těchto úloh využívají náčrty. RVP G zahrnuje také volné rovnoběžné promítání, které se uplatňuje při konstrukcích hranolů a jehlanů, včetně rovinných řezů těchto těles. Nicméně program neupřesňuje, do jaké míry by měli žáci zvládnout polohové a metrické vlastnosti útvarů v prostoru. Objemy a povrchy těles, přestože jsou v maturitních zkouškách z geometrie běžně vyžadovány, nejsou v RVP G konkretizovány ani podrobně rozpracovány.

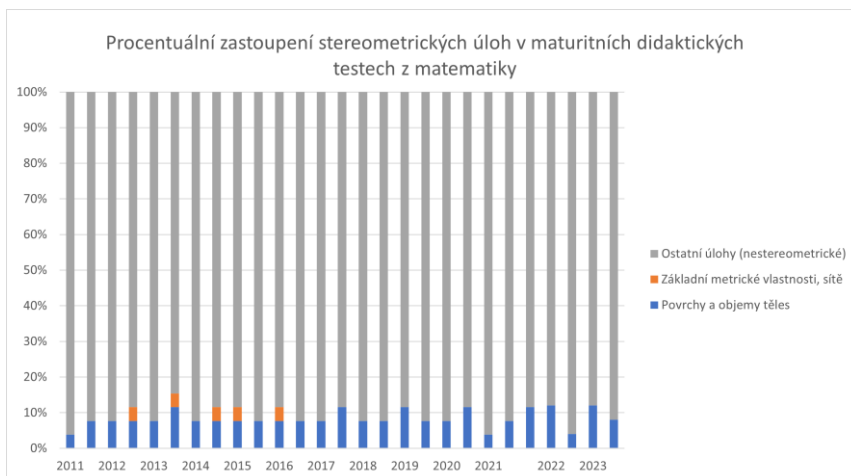
V rámci diplomové práce M. Plinty byla provedena pilotní analýza vybraných školních vzdělávacích programů (Praha, Brno, Ostrava), které autor porovnal navzájem a s Rámcovým vzdělávacím programem (RVP G). Plinta například zjistil, že na jedné ze základních škol v Ostravě se žáci v 9. ročníku učí osově řezy a nárysy těles a na základní škole v Praze se již od 7. ročníku využívá digitální prostředí pro modelování a manipulaci s prostorovými objekty. Analýza také odhalila rozdíly mezi jednotlivými středními školami v rozsahu výuky prostorové geometrie. Zatímco gymnázium v Brně poskytuje konkrétní výčet vyučovaných prostorových těles, gymnázia v Ostravě a Praze se omezují na obecnější popis očekávaných výstupů. V některých případech navíc chybí dostatečné propojení mezi planimetrií a stereometrií, což může vést k tomu, že je problematika prostorových útvarů ve výuce marginalizována. Pro rozvoj hlubšího pochopení prostorové geometrie nabízejí všechna analyzovaná gymnázia volitelné předměty, jako jsou semináře z matematiky nebo deskriptivní geometrie, které poskytují žákům možnost dále rozvíjet své znalosti v této oblasti.

Zajímavým pohledem na výuku stereometrie je její role v klíčových milnících vzdělávací dráhy žáků, zejména v rámci přijímacích zkoušek na střední školy a maturitní zkoušky z matematiky. Analýza provedená Plintou (2024) se zaměřila na zastoupení stereometrických úloh ve státních přijímacích a maturitních zkouškách, přičemž byla zkoumána kvantita úloh spadajících pod

stereometrii v souladu s očekávanými výstupy. Výsledky analýzy poukazují, že úlohy zaměřené na výpočty povrchů a objemů těles jsou častěji zastoupeny v obou zkouškách. Grafické znázornění výsledků (viz Obr.1, Obr.2) ukazuje výrazně nižší frekvenci úloh zaměřených na stereometrii v porovnání s jinými tématy. Tento nedostatečný důraz na stereometrii může přispět k tomu, že učitelé se prioritně zaměřují na jiné typy úloh a následně jsou studenti nedostatečně připraveni v dalších oblastech stereometrie, což se může negativně projevit při klasifikaci v běžné výuce.



Obr. 1: Procentuální zastoupení stereometrických úloh v přijímacích zkouškách na střední školy (Plinta, 2024)



Obr. 2: Procentuální zastoupení stereometrických úloh v maturitních didaktických testech z matematiky (Plinta, 2024)

3 Chyby a jejich role ve výuce stereometrie

Chybovat je lidské („Errare humanum est“) – toto známé latinské přísloví, které je často připisováno Senecovi, nás provází už více než dva tisíce let. Chyby jsou nedílnou součástí každodenního života. Od útlého věku se prostřednictvím chyb učíme a rozvíjíme. Děti získávají dovednosti právě na základě svých chyb, kdy je rodiče vedou k poznání správného řešení. V dětství se tak chyba stává přirozeným prostředkem k učení, k rozvoji nových schopností a porozumění okolnímu světu. Tento koncept se však často vytrácí s nástupem školního věku, kdy je na chybu nahlíženo jako na něco, čemu je třeba se vyhnout.

Navzdory tomu, že chyby jsou přirozenou součástí lidského učení, ve vzdělávacím systému je stále často vnímáme jako selhání, místo abychom je využili jako příležitost k dalšímu rozvoji. V této souvislosti je důležité změnit pohled na chybu a přijmout ji jako nástroj, který může výrazně přispět k rozvoji žáků. Hejný a kol. (2004) zdůrazňují, že v poslední době je chyba považována za přirozenou součást učení, a společnost na ni začíná nahlížet jinak. Z psychologického hlediska je přitom zásadní, aby chyba nebyla vnímána jako selhání, ale jako přirozený krok k poznání (Kosíková, 2011). Podle Čápa (1993) může správně využitá chyba plnit nejen poznávací, ale i motivační funkci, když její náprava vytváří konfliktní situace, které stimulují zájem a aktivitu žáků. V tomto kontextu je třeba chybu chápat jako nástroj, který může vést k hlubšímu porozumění učiva, pokud je včas diagnostikována a správně vyhodnocena.

Kulič (1971) definuje chybu jako odchylku od předepsané normy nebo řešení, které může vést k cíli buď přímo, nebo s velkými ztrátami. V rámci učení z chyb je klíčové, aby žáci dokázali rozpoznat chybná řešení a přistupovali k nim jako k příležitostem k učení. Učení pokusem a omylem, jak ho popisuje L. E. Thorndike, představuje chybu jako selektivní mechanismus, který posiluje úspěšné reakce a vylučuje ty neúspěšné (Kulič, 1971). Tento mechanismus je nezbytnou součástí procesu učení, kdy chybné výkony nejsou nutně chápány jako negativní, ale jako nezbytný krok k rozvoji správných forem chování.

Teorie kognitivních chyb, jak uvádí Kulič (1971), vidí každou odpověď či činnost jako smysluplný akt, který je třeba analyzovat, ať už je správný nebo chybný. Učitelé by proto neměli žákům okamžitě poskytovat správné odpovědi, ale spíše je vést k tomu, aby sami chybě porozuměli a dokázali ji korigovat.

3.1 Chyby vyskytující se při konstrukcích řezů těles

V rámci příspěvku jsme se zaměřili na oblast řezů těles, která vyžaduje vysokou míru prostorové představivosti a schopnost manipulovat s objekty v trojrozměrném prostoru. Řezy těles patří mezi nejnáročnější témata stereometrie, protože studenti musí být schopni vizualizovat, jak rovina prochází

tělesem a jaké výsledné rovinné tvary vznikají. Obtížnost roste s komplexností tělesa a polohy roviny řezu.

Jak autoři zmiňují v knize (Hejný, 1990), stereometrie je rozčleněna do několika úrovní náročnosti. Na začátku výuky studenti rozvíjejí svou prostorovou představivost prostřednictvím jednoduchých úloh, jako jsou hry s kostkami nebo modelování základních těles. Postupně se seznamují se složitějšími koncepty, včetně pohybů těles a kombinatorické geometrie. Vyvrcholením je práce s řezy těles, která představuje vrchol této hierarchie a vyžaduje pokročilé schopnosti manipulace s tělesem v představách.

Řezy těles nejen vyžadují technickou dovednost, ale často jsou zdrojem chyb způsobených nedostatečnou vizualizací, zejména při použití volného rovnoběžného promítání, které je běžně využíváno k zobrazování těles ve výuce.

3.2 Chyby vyplývající z vizualizace při volném rovnoběžném promítání

Volné rovnoběžné promítání je standardní metodou pro vizualizaci těles ve stereometrii. Učitelé a studenti obvykle používají úhel zkosení 45° a koeficient zkrácení $\frac{1}{2}$, což vede k zjednodušené vizualizaci objektů. Přestože tato metoda je efektivní, často přináší problémy s přesným zobrazením prostorových vztahů, protože informace z třetího rozměru je částečně ztracena. To vede k určitým chybám, které mohou studenty zmást.

Mezi nejčastější chyby způsobené volným rovnoběžným promítáním patří:

- Překrývání hran tělesa – některé hrany tělesa se v promítání překrývají, což vede k tomu, že studenti nemají jasnou představu o skutečném uspořádání hran v prostoru.
- Poloha bodu na jiné hraně – bod řezu se může v promítání jevit jako ležící na jiné hraně, než kde se skutečně nachází, což způsobuje chybné interpretace řezu.
- Překrývání spojnice řezu s hranou tělesa – spojnici řezu lze zaměnit s hranou tělesa, což vede k nesprávnému zobrazení výsledného tvaru řezu.
- Pseudoprůsečík mimoběžných hran – body řezu se mohou jevit, jako by ležely na průsečíku mimoběžných hran, což ve skutečnosti není správně.
- Nevhodné intuitivní označení rovin – roviny řezu mohou být nesprávně označeny nebo interpretovány, zejména pokud mají společnou průsečnici, což může vést ke zmatení při následné konstrukci řezu. (Ferdianová, Plinta, Procházková, 2021)

Tyto chyby pramení z nedostatečné vizualizace a mohou být pro studenty velkou překážkou v pochopení prostorových vztahů. Zároveň mohou podkopávat jejich sebedůvěru při řešení stereometrických úloh, protože se jim zdá, že výsledky jejich řešení nejsou v souladu s očekáváním, i když chybují především kvůli problémům s vizualizací.

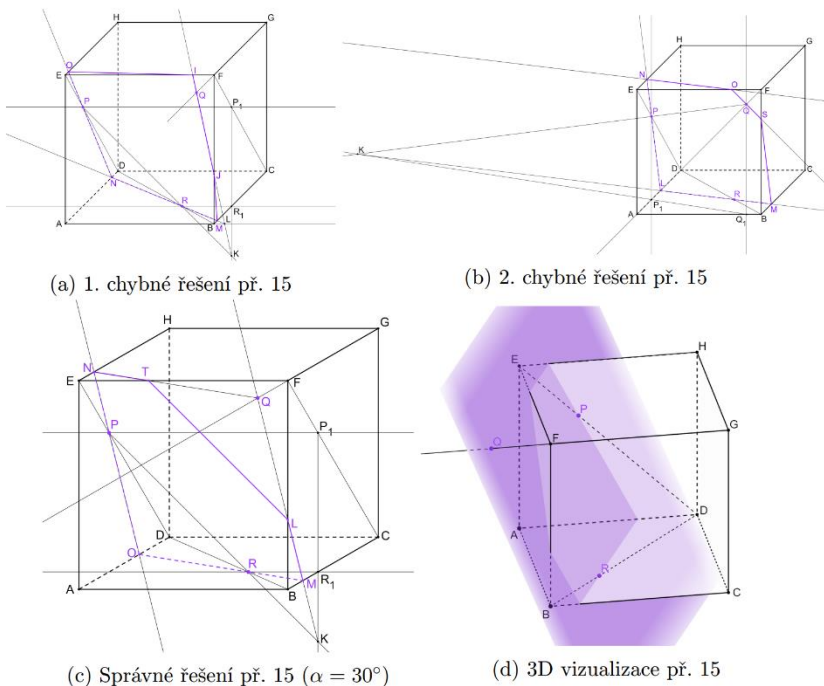
Chyby vznikající při řezech těles tedy nejsou pouze technické, ale vyžadují hlubší práci s rozvojem představivosti a lepší pochopení vizualizačních nástrojů, jako je volné rovnoběžné promítání. Pro předcházení chyb a zlepšení vizualizace si můžeme napomoci již takovou jednoduchou věcí jako je změna úhlu zkosení nebo o trochu náročnější pro přípravu využití 3D modelů a moderních technologií (3D modely v GeoGebře, AR, VR, 3D tisk apod.) Taktéž je možnost se dát cestou využití chybových zadání na základě studentských řešení.

4 Ukázky konkrétních úloh s chybou

Př.1. (Vondra, 2014) Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou PQR . Body P a R leží po řadě na stěnových úhlopříčkách DE a BD a bod Q leží na polopřímce GF . Platí, že $|ED| : |EP| = |BD| : |BR| = 3 : 1$ a $|GQ| = \frac{4}{3} |GF|$.

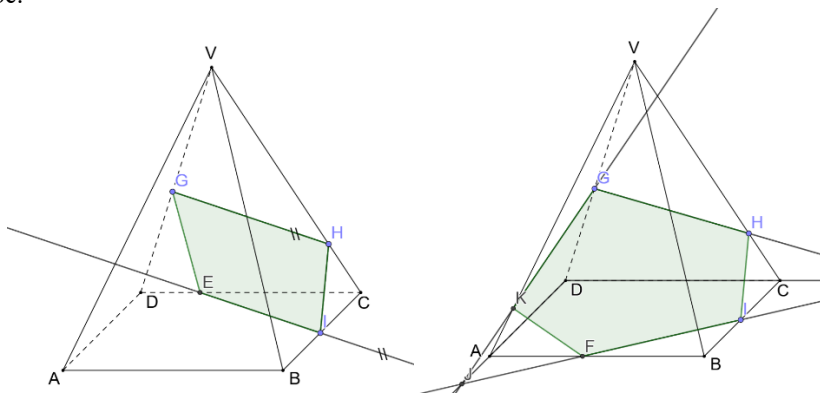
Žádné dva zadané body neleží ve stejné rovině, proto je nelze přímo spojit ani využít rovnoběžnosti. Je nutné nejprve najít průsečík přímky PR s rovinou pravé boční stěny, ve které leží bod Q . Pravoúhlými průměty bodů P a R do roviny pravé stěny jsou body P_1, R_1 , bod P_1 ležící na úhlopříčce stěny CF a R_1 ležící na hraně BC . Hledaným průsečíkem je bod K , který vznikne jako průsečík polopřímek P_1R_1 a PR . Spojením bodů K a Q se sestrojí hrana řezu LM v pravé stěně. Následně lze pomocí rovnoběžek nebo přímým spojováním bodů sestrojit zbylé hrany řezu a určit viditelnost jednotlivých částí.

Jednou z nejčastějších chyb v tomto případě je chybné umístění bodu Q . Při konstrukci může dojít k tomu, že je polopřímka GF prodloužena a splyne s úhlopříčkou stěny AF , což způsobí, že bod Q se zdá být bodem přední stěny, a tím dochází k nesprávnému řešení. Tato chyba se může objevit buď při spojování bodu K s bodem Q , což vede k chybnému výsledku, jak je znázorněno na obrázku 3a, nebo již na začátku řešení, jak ukazuje obrázek 3b. Chybu lze opravit například změnou úhlu zkosení, jak je vidět na obrázku 3c, nebo vizualizací ve 3D, jak znázorňuje obrázek 3d.



Obr. 3: Ilustrační řešení k úloze (Plinta, 2024)

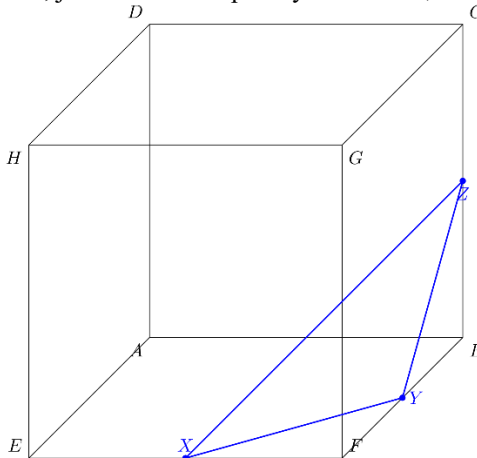
Př.2. Mějme daný jehlan $ABCDV$ a řez rovinou GHI . Rozhodni, která z následujících konstrukcí řezu je chybná a napiš, kde nastala chyba, popřípadě proč.



Obr. 4: Ukázka zadání pro práci s chybou

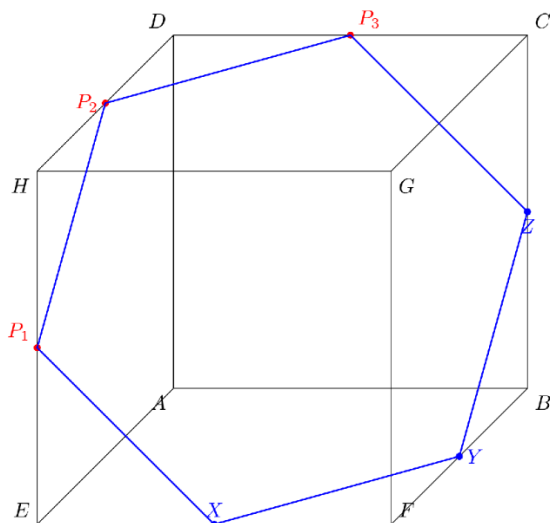
Příklad vznikl na základě studentských chyb v řešení na spřáteleném pracovišti jedné z ostravských škol. Původní zadání znělo: Mějme daný jehlan $ABCDV$. Sestrojte řez rovinou GHI . Úlohu následně studenti odzkoušeli o týden později v rámci výuky, kdy jim byla zpřístupněna v GeoGebra classroom. Většina studentů označila první obrázek za chybný a zdůvodnila nemožnost využití rovnoběžek u této konstrukce.

Př.3. Mějme zadanou krychli $ABCDEFGH$ a body XYZ . AI zkonstruovala řez rovinou XYZ následně, je návrh řešení správný? Pokud ne, nalezní chybu.



Obr. 5: Ukázka řešené úlohy pomocí AI (Chat-GPT 4.0)

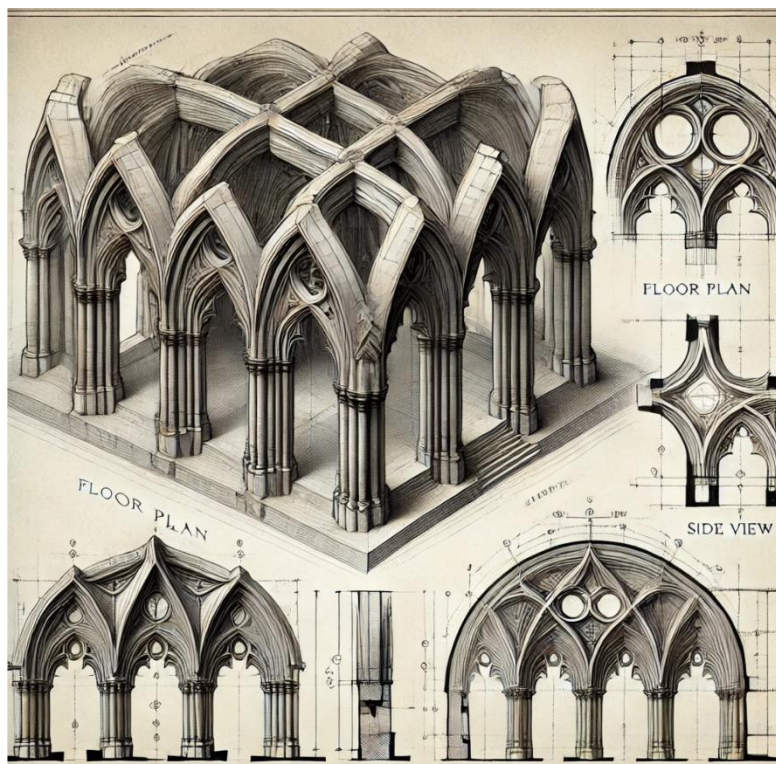
AI řez nedokončila a označila trojúhelník XYZ jako výsledný řez, což není správně. Cílem úkolu není jen práce s chybou, ale také rozvoj kritického myšlení, které ukáže, že umělá inteligence zatím není dokonalá při řešení geometrických úloh. Pokud by studenti měli k dispozici počítač nebo mobil, mohli by se naučit, jak pomocí správně formulovaných promptů postupně dospět ke správnému výsledku. Při zadání promptu, ve kterém bylo AI vysvětleno, jak vzniká řez krychle a že se jedná o rovinný útvar, AI přidala další body řezu, ale výsledek byl stále nesprávný. Po dalším upozornění, že řešení stále není správné, AI přidala další body a modrou barvou označila výsledný řez (Obr. 6). Studenti se navíc učí formulovat přesné a cílené otázky, na které potřebují jednoznačnou odpověď.



Obr. 6: Ukázka řešení úlohy pomocí AI (Chat-GPT 4.0) po několika upřesňujících promptech.

5 Závěr

Stereometrie představuje ve výuce geometrie klíčovou oblast, která vyžaduje od studentů rozvoj prostorové představivosti a schopnost pracovat s trojrozměrnými objekty. Jak ukazují výsledky, nedostatečné zastoupení stereometrických úloh ve státních zkouškách může vést k menšímu zaměření na tuto oblast ve školní výuce. Prostorová geometrie, zejména obtížnější úlohy jako řezy těles, jsou pro studenty náročné a často přinášejí chyby pramenící z vizualizačních problémů. Práce s těmito chybami je však cenným nástrojem pro rozvoj kritického myšlení a lepšího porozumění stereometrickým konceptům. Důležitým zjištěním je, že chyby při vizualizaci řezu těles často vznikají kvůli nedostatkům volného rovnoběžného promítání, což je technika běžně používaná ve výuce. Učitelé by měli tyto chyby aktivně využívat k diagnostice obtíží žáků a zavádět nové metody, které podporují správné pochopení stereometrie, jako například práce s 3D modely nebo rozšířenou realitou. Taktéž je již možné použít i prostředků umělé inteligence, kdy je navržen podrobný postup k řešení zadané úlohy. Pokud má student programátorské znalosti, AI dokáže vygenerovat i vizualizaci výsledků úlohy, například prostřednictvím obrázků vytvořených v TeXu. Možnosti AI generátorů obrázků (např. DALL-E) jsou však zatím omezené, takže je lze využít především jako inspiraci nebo pro nalezení chyb v návrhu technického výkresu (viz Obr. 7).



Obr. 7: Navrzení křížové klenby v technické dokumentaci pomocí DALL.E

Literatura

- [1] ČÁP, J. (1993): PSYCHOLOGIE výchovy a vyučování. ISBN: 80-7066-534-3J. Ziv, A. Lempel: *Compression of individual sequences via variable-rate coding*, IEEE transac. on Information Theory, Vol. IT-24, No.5., 1978, pp.530-536 – format GCG_Refer
- [2] FERDIÁNOVÁ, V., PLINTA, M. a PROCHÁZKOVÁ, M. (2021) ROZŠÍŘENÁ REALITA VE VYBRANÝCH ÚLOHÁCH STEREOOMETRIE: Stereometrické problémy. Online. In: Sborník příspěvků 10. konference Užití počítačů ve výuce matematiky. 1. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, s. 39. ISBN 978-80-7394-906-8. Dostupné z: https://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2021/Sbornik_UPVM_2021.pdf
- [3] HEJNÝ, M. (1990): Teória vyučovania matematiky 2. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. (1990): ISBN 80-08-01344-3.

- [4] HEJNÝ, M. A KUŘINA, F. (2001): Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování. Portál, Praha. s192 ISBN: 80-7178-581-4
- [5] KOSÍKOVÁ, V. (2011): Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty. Grada publishing, a.s., České Budějovice. s272. ISBN: 978-80-247-2433-1.
- [6] KULIČ, V. (1971): Chyba a učení. Státní pedagogické nakladatelství, Praha
- [7] PLNTA, M. (2024) Problematika volného rovnoběžného promítání ve výuce stereometrie. Diplomová práce, Ostravská univerzita.
- [8] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2023. Dostupné z https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_cista_verze.pdf
- [9] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. Praha: MŠMT, 2021. Dostupné z https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/09/001_RVP_GYM_uplne_zneni.pdf
- [10] VONDRA, J., MRÁZEK, J., ŠUBRTOVÁ, I. a MAŇÁSKOVÁ, E. (2014-2020): Matematika pro střední školy. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-220-3.

Stavitelka

She-Builder

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan

*Katedra softwaru a výuky informatiky
Malostranské nám. 2/25, 118 00 Praha 1, Česká republika
email: sarka@gbn.cz, Tomas.Holan@mff.cuni.cz*

Abstract. If we are teaching complete beginners how to program, it is necessary not only to give the pupils information about the syntax of the language and its meaning, but it is also necessary for the pupils to spend some time on their own writing and debugging programs, when it is not a matter of learning new procedures or tools, but of getting acquainted with program design, task decomposition, writing source code and finding bugs.

In high school, teaching in some text-based programming language is assumed, where the outputs often have a textual form and are not attractive. Therefore, we tried to create a module for the Python language, allowing ones to create and transform basic spatial shapes using simple commands. The task that the pupils solve can then be, for example, "Build a wall" or "Create a castle".

In addition to using loops, conditions, and creating custom functions in the programming language correctly, the student must also solve orientation in space for such a task, have an idea of the mutual position of objects, and use a three-dimensional coordinate system for writing the scene.

We have successfully used the module when teaching programming in a course for teachers.

Keywords: Programming, teaching, motivation, Python, 3D scene, function, parameters

Klíčová slova: Programování, výuka, motivace, Python, 3D prostředí, funkce, parametry

1 Motivace – výuka programování

Naučit se programovat vyžaduje získat nejen znalosti, ale také nezbytnou praxi, například von Hausswolff (2021) [1] trefně přirovnává výuku programování k výuce plavání.

Žáci na základní škole obvykle začínají programovat v blokových programovacích jazycích, pro které je typické grafické prostředí, které práci ztraktivňuje a pomáhá s motivací.

Na střední škole už studenti programují v nějakém textovém programovacím jazyce, dnes typicky v jazyce Python, a úlohy, které řeší, mají často také textový výstup: číslo nebo řadu čísel, textový řetězec... Ověřit správnost řešení může být pracné či náročné na pozornost, výsledek „není vidět“ a takové úlohy nebývají dost motivující.

Pro různé programovací jazyky již existují grafické knihovny, které umožní řešit úlohy více graficky zaměřené – například „želví grafika“ pro Python.

My jsme se pokusili vytvořit modul pro Python, který by zmíněný problém efektivně řešil a přinesl nový rozměr nejen tím, že dovolí vytvářet prostorové objekty, ale zejména tím, že pro jeho užití jsou potřeba jen minimální dodatečné znalosti, výsledky řešení jsou ihned vidět, je přívětivý, používá češtinu a přináší rychlý motivační efekt. Modul jsme nazvali *Stavitelka*.

Zároveň víme, že již existují projekty zaměřené na 3D grafiku, například Geometry3D [2] nebo Open3D [3], ale jejich cílem je spíše opravdová práce s 3D grafikou a jsou proto výrazně složitější než naše knihovna, jejímž cílem je podpora při výuce programování.

2 Řešení – Stavitelka

V modulu jsou k dispozici pouze tři základní objekty: Kvádr, koule a válec. Každý z nich má výchozí vlastnosti – parametry (poloha, rozměry a otočení) - s vhodně předdefinovanými hodnotami, o které se autor scény nemusí starat, dokud je nepotřebuje změnit. Pokud chceme zobrazit kouli, stačí zavolat funkci `Koule()` z modulu a zobrazit scénu. Celý program (který můžeme spustit třeba přímo z shellu Pythonu) má tedy jen tři příkazy:

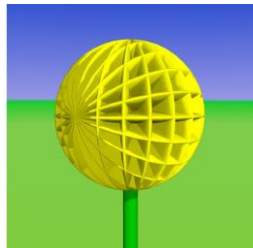
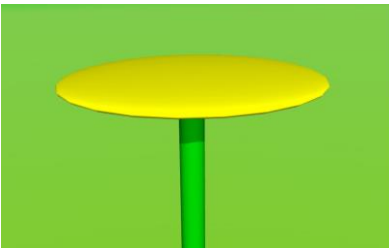
```
import stavitelka as st
st.Koule()
st.ZobrazScenu()
```

Chceme-li kuličku obarvit, zploštit ve svislém směru a přidat stonek, nahradíme prostřední příkaz dvojicí příkazů, kde některým parametrům změním hodnoty (Obr. 1 vlevo):

```
st.Koule(sy=0.1,barva=(1,1,0))
st.Valec(y=-2,sx=0.1,sz=0.1,sy=2,barva=(0,0.5,0)),
```

případně nahradíme plochý květ členitějším (Obr. 1 vpravo)

```
for i in range(20):
    st.Koule(sy=0.1,barva=(1,1,0),rx=i*18)
    st.Koule(sx=0.1,barva=(1,1,0),ry=i*18)
```



Obr. 1: Vlevo jedna transformovaná koule, vpravo dva samostatné cykly

Pro výuku a motivaci žáků je podstatné, že výsledek, tedy i každou provedenou změnu, vidí žák okamžitě po spuštění programu.

Modul obsahuje i funkci, díky níž lze ze základních objektů vytvořit (definovat) nový tvar, opět s výše uvedenými parametry – nově definované tvary tedy lze také posouvat, škálovat a otáčet. Zatímco tedy „kyticíku“ na Obr. 2 vlevo sestavíme díky jednomu cyklu, v němž dílek otáčíme kolem jeho středu:

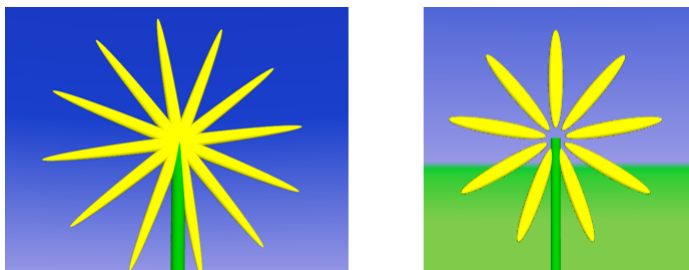
```
for i in range(6):
    st.Koule(sx=0.1, sz=0.1, sy=2,
             rz=i*30+10, barva=(1, 1, 0))
    st.Valec(...),
```

pro kyticíku vpravo bychom buď museli počítat souřadnice středů jednotlivých otáčených „okvětních lístků“ (pomocí goniometrických funkcí) tak, aby ležely na kružnici kolem středu kyticíky, nebo můžeme kolem osy z otáčet posunutý lístek. Ten definujeme jako nový TVAR „lístek“ – jako deformovanou kouli posunutou v ose x:

```
st.TVAR_zacatek_definice("lístek")
st.Koule(x=0.6, sz=0.15, sy=0.15, barva=(1, 1, 0))
st.TVAR_konec_definice()
```

„lístek“ pak několikrát otočíme kolem osy z:

```
for i in range(9):
    st.TVAR("lístek", rz=i*40+10)
st.Valec(...)
```



Obr 2: Vlevo otáčení dílku kolem středu objektu, vpravo nový objekt

Tvary můžeme vnořovat do sebe a postupně tvořit složitější části scény:

```
st.TVAR_zacatek_definice("lístek")
st.Koule(x=1, sz=0.2, sy=0.6, rx=30, barva=(1, 0, 0))
st.TVAR_konec_definice()
```

```
st.TVAR_zacatek_definice("kytka")
POCET = 17
for i in range(POCET):
    st.TVAR("lístek", rz=i*360/POCET)
```

```

st.Koule (sz=0.5, barva=(1,1,0))
st.Valec (sx=0.2, sz=0.2, sy=2, y=-2, z=0.2,
          barva=(0,0.5,0))
st.TVAR_konec_definice()

```

Vlastní tvar „kytka“ pak použijeme k vytvoření květinového pole (Obr. 3):

```

import random
POLE = 10
for x in range(POLE):
    for z in range(POLE):
        smer = random.randrange(360)
        st.TVAR ("kytka", x=3*x, z=3*z, y=4, ry=smer)
st.Hranol (x=2*POLE, z=2*POLE, sx=5*POLE, sz=5*POLE,
          barva=(0.2,0.2,0))
st.ZobrazScenu()

```



Obr 3: Pole „kytek“ definovaných jako TVAR

2.1 Co je uvnitř

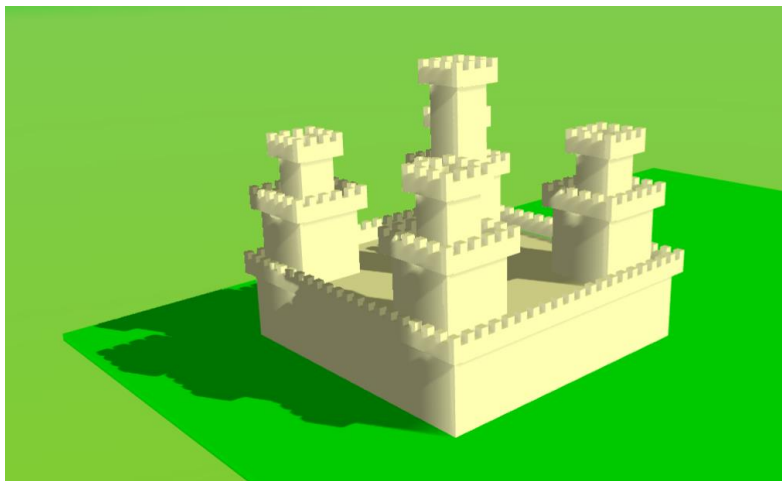
Posledním příkazem celého python skriptu (viz výše) je příkaz *Stavitelky* *ZobrazScenu()*, který zavolá webový prohlížeč a předá mu modulem sestavený kód scény. Tento kód jsme převzali ze staršího projektu *Projektor* [4], který je určený pro zjednodušené „písmenkové“ kódování 3D scény a popsali jsme ho v [5].

Scéna se zobrazuje v html stránce ve vnořeném x3dom [6], jehož scéna se generuje z výše zmíněného „písmenkového“ kódování vnořeným javascriptem.

Stejný „písmenkový“ kód lze poté přenést do *Projektoru*, v němž je možné nastavovat a přepínat nastavení kamery, ale také ukládat konstrukce a vytvářet učitelské a žákovské účty.

2.2 K čemu lze Stavitelku použít při výuce programování

Kromě porozumění syntaxi jazyka Python a nácviku užití cyklů a podmínek lze *Stavitelku* použít pro nácvik dekompozice. Například při zadání „Postavte hrad podle obrázku“ (viz Obr. 4) by si žáci měli všimnout, že se v konstrukci opakují některé části, a tudíž by bylo vhodné jejich tvorbu vyčlenit do funkce. Zároveň ale nemusí jít vždy o identickou kopii, a proto by taková funkce měla mít své parametry – a rozhodování, jaké parametry funkce bude mít, tvoří další část výuky programování.



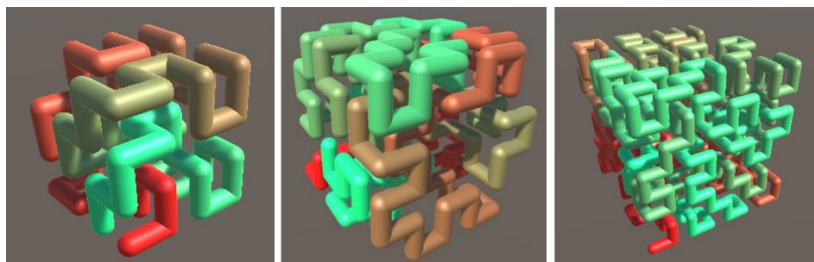
Obr 4: Obrázek k zadání úlohy „Postavte hrad podle obrázku“

Ještě vyšší úroveň práce potom představuje situace, kdy žáci mají společně vytvořit nějakou složitější scénu, může to být jejich učebna, vesnice, pohádka nebo vánoční betlém. V takovém případě se musí domluvit na řadě bodů, jako kdo bude mít jakou roli v týmu, kdo bude dělat jakou část scény, jak budou tyto části rozmístěny v prostoru, případně kdo je rozmístí, jak se budou jmenovat soubory s jednotlivými částmi, jaké tyto části budou mít rozhraní... Zároveň u toho mohou žáci zažít, jak snadno mohou vznikat nedorozumění, jak může být těžké se domluvit přesně a jednoznačně, i to, kolik času zabere spojit hotová dílčí řešení.

2.3 Další využití – vizualizace

Kromě výuky programování můžeme *Stavitelku* využít i pro vizualizaci řešení některých obtížnějších, třeba i kombinatorických úloh, které je možné formulovat geometricky. Například zjišťování kolik různých prostorových útvarů lze slepit z daného počtu stejně velkých kostiček nebo kolika způsoby lze rozdělit krychli na dvě souvislé části, jsme popsali již v [5] a [7], ale

můžeme třeba i zobrazovat výsledky hledání možností, jak pomocí zahnutých částí trubky („kolen“) vyplnit krychli (Obr. 5).



Obr 5: Vyplnění krychle pomocí kolen (částečné řešení)
– zleva doprava krychle $4 \times 4 \times 4$, $6 \times 6 \times 6$, $8 \times 8 \times 8$.

3 Zkušenosti

Stavitelku jsme zatím vyzkoušeli pouze na středoškolských učitelích, účastnících Letní školy učitelů informatiky. Zkušenosti napovídají, že takovýto jednoduchý modul s okamžitou viditelností trojrozměrných výsledků má potenciál žáky zaujmout.

Literatura

- [1] von Hausswolff, K. (2021). *Practical thinking while learning to program – novices' experiences and hands-on encounters*. Computer Science Education, 32(1), 128–152.
<https://doi.org/10.1080/08993408.2021.1953295>
- [2] Geometry3D, (2021). cit. [2024-09-30].
Dostupné z <https://pypi.org/project/Geometry3D/>
- [3] Open3D,(2018). cit. [2024-09-30].
Dostupné z: <https://www.open3d.org/>
- [4] Projektor. [online] 2023 cit. [2024-09-30].
Dostupné z: <https://projektor.geometry.cz/>
- [5] *Zajímavé úlohy*. In: Matematika–fyzika–informatika 29 (1, 3), Praha, 2020
- [6] *Official x3dom documentation*. [online] 1995 cit. [2024-09-30].
Dostupné z: <https://doc.x3dom.org/>
- [7] Gergelitsová, Š., Holan, T. (2024). *Dělení kostky na vlastní oči*. Matematika–Fyzika–Informatika, 33(2), 135–144.
Získáno z <https://mf.upol.cz/index.php/mfi/article/view/820>

A Non-linear Parabola-preserving Subdivision Scheme

Klaudia Hamajová, Pavel Chalmovianský

Department of Algebra and Geometry

Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovak Republic

klaudia.hamajova@fmph.uniba.sk, pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstract. Refining schemes are widely used in practical applications, e.g. in computer graphics, data-fitting, solid modelling and especially in the video game industry. We describe a non-linear planar scheme for polygonal lines with normals at the vertices, which refines using locally computed parabolas. We show several examples of the application of this scheme and prove some properties such as shift invariance and fixing parabolas.

Keywords: Non-linear subdivision, approximation, parabola.

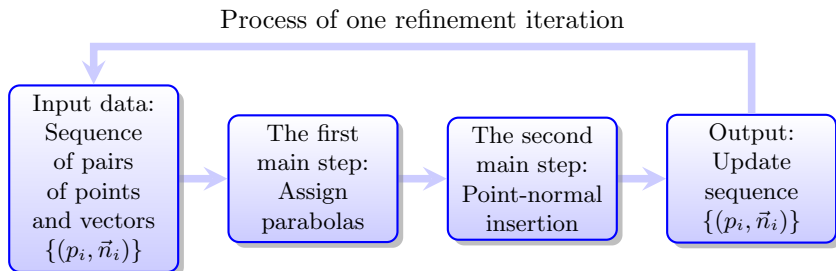
1 Introduction

Subdivision schemes generate smooth curves or surfaces from discrete data by infinitely repeated refinements. The topic of non-linear smoothing is currently quite popular. The paper [3] by Evgeny Lipovetsky from the year 2022 deals with a non-linear refinement using circles. In our previous paper [1], we presented a new non-linear subdivision scheme that refines using all conics at once. This year, a paper [2] was published that also deals with refinement using conics. These schemes mainly differ in the refinement rules.

In this paper, we present a new non-linear planar refinement scheme that refines using only parabolas. Currently, there is no scheme that refines only with parabolas. In the method described below, the basic construction step consists in fitting a parabola to a pair of adjacent points and associated normals. Newly generated points are then selected from it. The normal is determined as the normal of the parabola.

2 Pipeline of the parabola-preserving scheme

In this part, the process of the proposed scheme is presented and the basic steps of the scheme are discussed in more detail.



Our goal is to obtain a limit curve with the required properties (such as smoothness and finite length of the limit curve) after a given number of refinements.

2.1 The first step: Assign parabolas

Consider two different points $p_i, p_{i+1} \in \mathbb{R}^2$, where $i \in \mathbb{N}$, with corresponding normal vectors $\vec{n}_i, \vec{n}_{i+1} \in \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ lying in one half-plane with respect to the segment formed by the points p_i and p_{i+1} . The parabola P is defined by the equation

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad (1)$$

and the condition $ac - b^2 = 0$. The function (1) minimizes the objective function

$$F(a, b, c, d, e, f) = w_i P(p_i)^2 + w_{i+1} P(p_{i+1})^2 + \tilde{w}_i \|\nabla P(p_i) - \vec{n}_i\|^2 + \tilde{w}_{i+1} \|\nabla P(p_{i+1}) - \vec{n}_{i+1}\|^2, \quad (2)$$

where $w_i > 0$ is the corresponding weight to the point p_i , and $\tilde{w}_i > 0$ is the weight assigned to the normal vector \vec{n}_i . The user chooses weights at the beginning of refinement, which do not change during refinement. The objective function (2) measures weighted algebraic distance between the point and the parabola and weighted deviation between the normal and the gradient of the parabola. Then the task is to find

$$\arg \min_{a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}} F(a, b, c, d, e, f),$$

hence, to solve a system of linear equations with unknowns a, b, c, d, e, f

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial d} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial f} = 0, \quad (3)$$

in order to find stationary points of F . As we show below, the solution of the system of equations (3) together with the condition $ac - b^2 = 0$ is invariant with respect to Euclidean transformations. Thus, the following coordinate system

$$p_i = (-r, 0), \quad p_{i+1} = (r, 0), \quad \vec{n}_i = (\cos \eta, \sin \eta), \quad \vec{n}_{i+1} = (\cos \phi, \sin \phi),$$

can be considered, where $r > 0$ and $\eta, \phi \in \mathbb{R}$. Any two non-identical points with given associated normals can be mapped to this situation using a Euclidean transformation.

If $\forall i: w_i = \tilde{w}_i = 1$ in objective function (2), then the coefficients for the parabola P are as follows

$$a = \frac{\cos \phi - \cos \eta}{4r}, \quad b = \frac{\sin \phi - \sin \eta}{4r}, \quad c = \frac{-(\sin \eta - \sin \phi)^2}{4r(\cos \eta - \cos \phi)}, \quad (4)$$

$$d = \frac{\cos \eta + \cos \phi}{4(r^2 + 1)}, \quad e = \frac{\sin \eta + \sin \phi}{4}, \quad f = \frac{r \cos \eta - r \cos \phi}{4}. \quad (5)$$

If we consider non-zero weights, then the only case where a solution does not exist is the case when the normal vectors are equally oriented, so $\eta = \phi$. In this case, the new point is determined as the center of neighboring points with the same oriented normal. In the remaining cases, the solution is unique. The computed parabola only approximates the input data, so the original points do not have to lie on the parabola, see Fig. 1.

2.2 The second step: Point-normal insertion

The second step is to find a new point-normal pair for the next iteration. Optimizing the objective function F , the coefficients for the prescription of the parabola are obtained. Then a new inserted point q_i is obtained from the intersection of the axis of the line segment of points p_i, p_{i+1} and the parabola P . By this intersection we can get one or two solutions, see Fig. 2. If two solutions are obtained by intersection, the one that is closer to the original points is selected, see Fig. 2 on the right. Then the new normal is determined by the normal of the parabola.

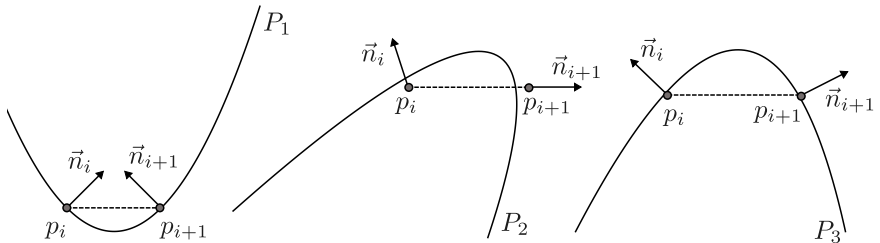


Fig. 1: Examples of assigning a parabola to point-normal pairs.

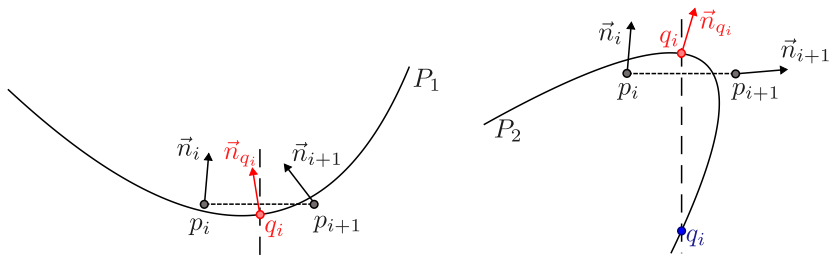


Fig. 2: Left – inserting a new point-normal pair if we have only one solution. Right – choosing a new point-normal pair if we have two solutions.

3 Properties of the parabola-preserving scheme

The parabola-preserving scheme can be applied to any data: open or closed polygonal line, convex or non-convex polygons, symmetric or non-symmetric data and so on. An example of the application of the parabola-preserving scheme is shown in Fig. 3. We can observe a smooth transition of normals and the distance of neighboring points converges to zero.

Theorem 3.1. *A non-linear parabola-preserving subdivision scheme is invariant with respect to rotation and translation.*

Proof. The task now is to verify that if we have two points p_i and p_{i+1} together with the corresponding normal vectors \vec{n}_i and \vec{n}_{i+1} , then after minimizing the objective function (2) we obtain the same parabola as when the points p_i , p_{i+1} and the normals \vec{n}_i , \vec{n}_{i+1} , we move it by the vector (x_0, y_0) and rotate it by an angle ω . Thus, the relations between the points p_i and p'_i is as follow

$$p_i \rightarrow p'_i = (k(x - x_0) + s(y - y_0), -s(x - x_0) + k(y - y_0)),$$

where $k = \cos\omega$, $s = \sin\omega$. If $k = 1$, $s = 0$ (the angle $\omega = 0$) then the transformation is a pure translation and if $x_0 = y_0 = 0$ then the transformation is a pure rotation.

The same parabola can be represented by two similar quadratic equations in the two systems of coordinates:

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \quad (6)$$

$$P'(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0, \quad (7)$$

where $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$. We substitute

$$(x, y) = (x_0 + kx' - sy', y_0 + sx' + ky') \quad (8)$$

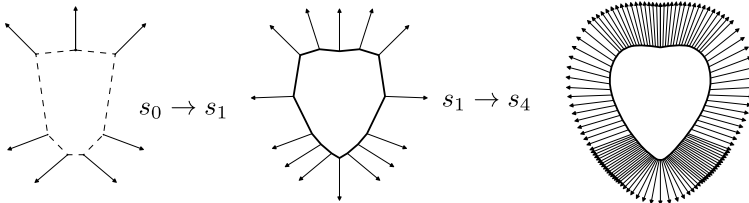


Fig. 3: An example of applying the parabola-preserving scheme to a convex symmetric polygon. On the left – input data. In the middle – the 1th iteration. On the right – the 4th iteration.

into equation (6)

$$P(x, y) = a(x_0 + kx' - sy')^2 + 2b(x_0 + kx' - sy')(y_0 + sx' + ky') + c(y_0 + sx' + ky')^2 + 2d(x_0 + kx' - sy') + 2e(y_0 + sx' + ky') + f = 0$$

and we compare the corresponding members. Then the relations between the coefficients are

$$a' = ak^2 + 2bks + ks^2, \tag{9}$$

$$b' = (c - a)ks + b(k^2 - s^2), \tag{10}$$

$$c' = as^2 - 2bks + ck^2, \tag{11}$$

$$d' = k(ax_0 + by_0 + d) + s(bx_0 + cy_0 + e), \tag{12}$$

$$e' = -s(ax_0 + by_0 + d) + k(bx_0 + cy_0 + e), \tag{13}$$

$$f' = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = P(x_0, y_0). \tag{14}$$

After substituting the coordinates of the point p'_i into the objective function (2) and subsequent minimization, the coefficients $a' - f'$ are obtained. These coefficients are the same when the coefficients $a - f$ are substituted into the equations (9–14). This showed that the solution of the system of equations (3) is invariant with respect to the Euclidean transformation. \square

Definition 3.2. *Consider the input data from the parabola P . The refinement scheme preserves parabolas if the original parabola from which the input data was used is obtained as the limit curve.*

Theorem 3.3. *The parabola-preserving scheme preserves parabolas if $\forall i: w_i = \tilde{w}_i = 1$ in objective function (2).*

Proof. The general equation of a parabola is

$$y = h_1(x - h_2)^2 + h_3, \tag{15}$$

where h_1, h_2, h_3 are parabola parameters and $x \in \mathbb{R}$. Consider the input data from the parabola, i.e. $p_i = (x, h_1(x - h_2)^2 + h_3)$, $p_{i+1} = (x + \xi, h_1(x + \xi - h_2)^2 + h_3)$, where $\xi \in \mathbb{R}$ and $\vec{n}_i = (2h_1(x - p_2), -1)$, $\vec{n}_{i+1} = (2h_1(x + \xi - p_2), -1)$. Then the solution of the linear system of equations (3) is

$$a = h_1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = -h_1h_2, \quad e = -\frac{1}{2}, \quad f = h_1h_2^2 + h_3. \tag{16}$$

After substituting the solution (16) into (1), we get

$$g(x, y) = h_1x^2 - 2h_1h_2 - y + h_1h_2^2 + h_3 = 0. \tag{17}$$

By expressing y from equation (17), we get the parabola defined by (15). If any two points and the corresponding normal vectors are taken from the parabola, the original parabola is obtained by minimizing the objective function. The new point is generated by the intersection of the axis connecting the points p_i and p_{i+1} and the calculated parabola. So the newly inserted point is taken from the original parabola. What had to be proven.

It is good to notice that only parabolas whose axis is parallel to the y -axis were considered. Since the presented scheme is invariant with respect to Euclidean transformations, it was sufficient to consider only these parabolas. \square

4 Conclusion

This paper dealt with the process of refining a polygonal line with normals at the vertices. We presented a new non-linear planar method and described the fundamental steps of the refinement process. The presented scheme is still in the process of development, when we are looking for its advantages and disadvantages. The parabola-preserving scheme works well for close points as well as distant ones. In the future, we would like to extend the parabola-preserving method to curve constructions in 3D and then focus on the creation of surfaces using the tensor product construction. Based on the experimental results, we claim that the parabola-preserving scheme behaves convergently. In the future, we want to show the convergence of the parabola-preserving scheme and thereby the resulting G^1 -continuity.

Acknowledgements

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-16-0053, by the Grant KEGA 038UK-4/2024 and by the Grant of Comenius University No. UK/3180/2024.

References

- [1] K. Hamajová, P. Chalmovianský: *Non-linear Refinement of Point-Normal Data Using Conics*, ICGG 2024 - Proceedings of the 21st International Conference on Geometry and Graphics, Springer, pages 330–341, 2024
- [2] N. Bügel, L. Romani, J. Kosinka: *A point-normal interpolatory subdivision scheme preserving conics*, Computer-Aided Design, volume 111, 2024
- [3] E. Lipovetsky: *Subdivision of point-normal pairs with application to smoothing feasible robot path*, The Visual Computer, 38, 2022

Trisekce úhlu jako téma projektu v přípravě učitelů matematiky

Trisection of an angle as the topic of a project solved by students of mathematics teaching

Roman Hašek, Kateřina Kalová

*Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice, Česká republika
hasek@pf.jcu.cz, kalovk00@pf.jcu.cz*

Abstract. One of the tasks of teacher training programs is to provide students with an environment enabling their education and the development of their competences in interaction with appropriate methods and means, which is so inspiring and stimulating that it naturally leads them to do so creatively and effectively, according to the current state and needs of human knowledge. In the background of completely new revelations about the use of two well-known algebraic curves to trisect an angle the contribution presents specific student projects solved by the prospective mathematics teachers. The prerequisite for success was not only the knowledge of the geometric subject matter, but also the ability to apply it creatively and the skill of effective presentation of the obtained results.

Keywords: Cycloid of Ceva, GeoGebra, quadrifolium, angle trisection, trisector, 3D printing.

Klíčová slova: Cevova cykloida, GeoGebra, kvadrifolium, trisekce úhlu, trisektor, 3D tisk.

1 Úvod

Jedním z úkolů studijních programů přípravy učitelů je poskytnout studentům prostředí umožňující jejich vzdělávání i rozvoj jejich kompetencí v interakci s odpovídajícími metodami a prostředky, které je při tom natolik inspirativní a podnětné, že je přirozeně vede k tomu, aby tak činili kreativně a efektivně, dle aktuálních možností a potřeb lidského poznání.

Příspěvek na pozadí zcela nových poznatků o užití dvou známých algebraických křivek k trisekci úhlu představuje konkrétní projekty řešené studenty učitelství matematiky Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Předpokladem úspěchu přitom byla nejenom znalost geometrického učiva, ale také schopnost jeho kreativního aplikování a dovednost prezentace získaných výsledků.

Konkrétně pojednáváme dvě metody trisekce úhlu užitím algebraických křivek šestého stupně, Cevovy cykloidy [2] a kvadrifolia [10], které dle našich znalostí nebyly dosud publikovány. Křivky nejprve stručně uvedeme, potom popíšeme předmětné postupy jejich využití k trisekci úhlu

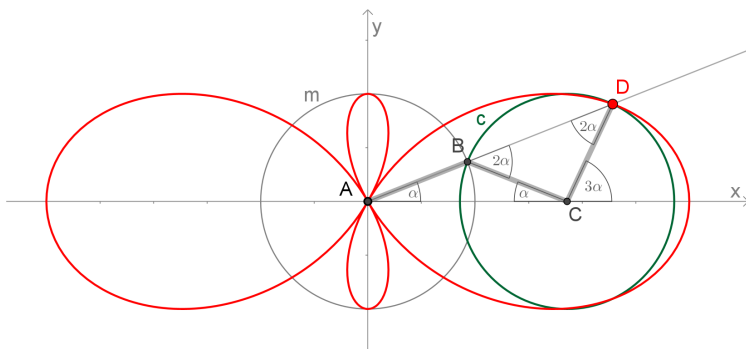
a nakonec představíme výsledky studentských projektů založených na 3D tisku pomůcek pro realizaci těchto postupů.

2 Cevova cykloida

Ve své latinsky psané knize *Opuscula mathematica* [1], publikované v roce 1699, představil Tommaso Ceva (1648–1737), mladší bratr Giovanniho Cevy (1647–1734), na stranách 31–32 třídu křivek, kterým říkal cycloidum anomalorum. Křivkou nejnižšího stupně mezi nimi je křivka šestého stupně

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(3x^2 - y^2)^2 = 0, \quad (1)$$

kde r je poloměr její základní kružnice m , která je opsána dvojicí menších smyček křivky, viz Obr. 1. Jako jednu z jejích vlastností Ceva uvádí vhodnost k trisekci úhlu, tj. k neeukleidovskému konstrukčnímu rozdělení úhlu na tři stejné části. Příslušný princip je zřejmý z Obr. 1. Od doby vydání knihy je tak křivka s trisekcí úhlu spojována a v dostupných zdrojích je zmiňována jako Cevova trisectrix [2] nebo jako Cevova cykloida [11].



Obr. 1: Cevova trisectrix; vytvořeno v GeoGebře, [7]

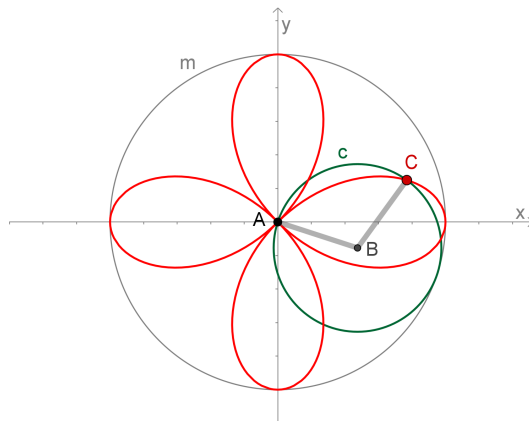
Jak bylo uvedeno, zde představíme jinou metodu použití Cevovy křivky k trisekci úhlu. Metodu, která pracuje s jinou orientací křivky a, na rozdíl od metody uvedené Cevou, využívá menší z jejích smyček. Tato metoda je snadněji proveditelná, a navíc ji lze využít k vytisknutí jednoduché pomůcky pro trisekci, jak bude zanedlouho ukázáno.

3 Kvadrifolium

Druhou křivkou, kterou zde v souvislosti s trisekcí úhlu představíme, je kvadrifolium

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 - y^2)^2 = 0, \quad (2)$$

kde r je poloměr kružnice m jí opsané, viz Obr. 2. Křivku představil italský matematik Guido Grandi (1671–1742) v roce 1728 ve své latinsky psané



Obr. 2: Kvadrifolium; vytvořeno v GeoGebře, [8]

knize *Flores Geometrici ex Rhodonearum* [3].

Co spojuje obě tyto křivky, kromě jejich stupně a vhodnosti pro trisekci úhlu? Obě patří do rodiny tzv. rulet, kvadrifolium je konkrétně hypotrochoidou [8], Cevova cykloida potom trochoidou [7], viz Obr. 1 a 2. Za pozornost bezesporu stojí i skutečnost, že kvadrifolium je kisoidou Cevovy cykloidy. Více o obou křivkách a o nových metodách jejich použití k trisekci úhlu najde čtenář v [4, 5]. Nadále se zaměříme především na projekt 3D tisku pomůcek pro trisekci na těchto metodách založených.

4 Trisekce užitím daných křivek

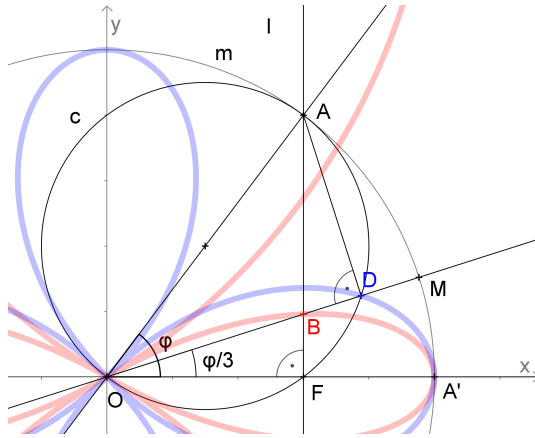
Detailní pojednání nových metod trisekce úhlu užitím Cevovy cykloidy a kvadrifolia, i s formulacemi příslušných vlastností a jejich důkazy, jsou dostupná v [5, 6]. Zde se omezíme na pouhé představení principů těchto metod.

4.1 Cevova cykloida

Viz Obr. 3, kde je zobrazena část Cevovy křivky (červená křivka) dané rovnicí

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 - 3y^2)^2 = 0. \quad (3)$$

Potom pro libovolný ostrý úhel $\phi = \angle A'OA$, jehož rameno OA' je totožné s kladnou poloosou x a jehož druhé rameno protíná základní kružnici m křivky (3) v bodě A v prvním kvadrantu, je jeho třetinou úhel $\frac{\phi}{3} = \angle A'OB$, kde B je průsečík kolmice vedené z A na osu x s menší smyčkou křivky (3).



Obr. 3: Cevova křivka spolu s kvadrifoliem a jejich role v trisekci úhlu; vytvořeno v GeoGebře

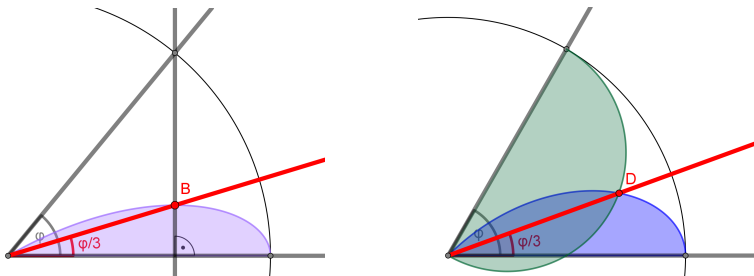
4.2 Kvadrifolium

Viz Obr. 3, kde je, spolu s Cevovou křivkou, zobrazena část kvadrifolia (modrá křivka)

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 - y^2)^2 = 0. \quad (4)$$

Potom pro libovolný ostrý úhel $\phi = \angle A'OA$, jehož rameno OA' je totožné s kladnou poloosou x a jehož druhé rameno protíná základní kružnici m křivky 3 v bodě A v prvním kvadrantu, je jeho třetinou úhel $\frac{\phi}{3} = \angle A'OD$, kde D je průsečík (Thaletovy) kružnice nad průměrem OA se smyčkou kvadrifolia (s částí, která leží uvnitř $\angle A'OA$) o rovnici (4).

4.3 Návrhy pomůcek



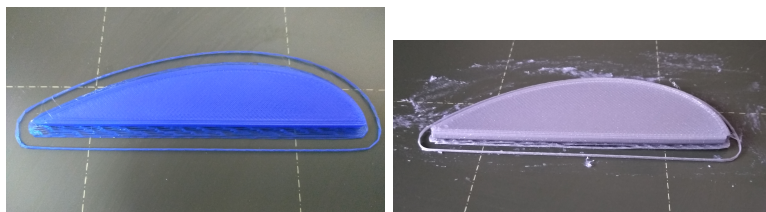
Obr. 4: Pomůcky pro trisekci, užitím Cevovy křivky (vlevo) a kvadrifolia (vpravo); vytvořeno v GeoGebře

Na základě výše uvedených vztahů obou křivek k trisekci úhlu lze snadno navrhnout principy fungování příslušných pomůcek, jak vidíme na Obr. 4.

5 Projekt 3D tisku

Pokud bychom měli pomůcku ve tvaru modré oblasti na Obr. 4, mohli bychom jí doplnit pravítko a kružítko, a pomocí těchto tří nástrojů bychom byli schopni provést trisekci daného úhlu. To byla základní myšlenka, která se stala impulsem k zadání studentských projektů pro tisk takovýchto pomůcek, založených na Cevově křivce nebo kvadrifoliu. Vybrané artefakty, vytisknuté na tiskárně Prusa i3 MK3S+ (<https://www.prusa3d.com>) jsou zachycené na Obr. 5.

Během práce na projektu žáci dosáhli viditelného pokroku ve svých kompetencích a znalostech relevantních pro daný úkol. Zpočátku se jim nedařilo vytisknout požadovanou část, o čemž svědčila řada neúspěšných pokusů. Klíčovým bodem zlomu pro jejich úspěch bylo zjištění optimálního způsobu geometrické reprezentace objektu pro 3D tisk. Po neúspěšných pokusech vytisknout model přímo na základě parametrické reprezentace v programu GeoGebra, dospěli k závěru, že vhodnější je nahradit plochu ohraničenou křivkou a úsečkou polygonem. Pro jeho konstrukci použili software GeoGebra 6 a pro zpracování modelu program PrusaSlicer 2.7.4. Kvalita výsledného produktu byla nakonec velmi dobrá (viz obr. 5).



Obr. 5: Pomůcky pro trisekci vytisknuté na 3D tiskárně Prusa i3 MK3S+

6 Závěr

Současné vědecké studie zabývající se vzděláváním STEM jako způsobem přípravy žáků a studentů na neustále se měnící svět se do značné míry shodují na tom, že při jeho realizaci hrají významnou roli pojmy jako kreativita, schopnost učit se a aplikovat nové poznatky, dovednosti řešit problémy a provádět autentické zkoumání. K ambicím příspěvku patřilo ukázat, jak lze tyto dovednosti procvičovat a rozvíjet na základě historického tématu, konkrétně řešením konkrétního studentského projektu, v němž se aplikuje základní matematické učivo na řešení problémů vy-

cházejících z vhodně shromážděných a prezentovaných historických materiálů. Ukázalo se, že v rámci takového projektu studenti nejen procvičují a rozvíjejí výše uvedené dovednosti ve spojení se svými digitálními kompetencemi, ale také provádějí technický návrh a výrobu příslušného artefaktu.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu GA JU 041/2022/S.

Literatura

- [1] T. Ceva: *Opuscula mathematica*. Mediolani, typis Iosephi Pandulfi Malatestae, 1699
- [2] R. Ferreol: Ceva trisectrix and sectrix. In: *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*, 2017
- [3] G. Grandus: *Flores geometrici ex Rhodonearum*. typis Regiae Celsitudinis, Florentiae, 1728
- [4] R. Hašek: Creative Use of Dynamic Mathematical Environment in Mathematics Teacher Training. In: Richard, P. R., Vélez, M. P. and Van Vaerenbergh, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence, Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*, Springer, Cham, 2022
- [5] R. Hašek: Mathematics teacher training from the perspective of STEM – a particular case. *The Electronic Proceedings of the 28th Asian Technology Conference in Mathematics*, Mathematics and Technology, LLC, 2023
- [6] R. Hašek: Ceva's Trisectrix from a Different Perspective; Two New Methods of an Angle Trisection. *ICGG 2024 – Proceedings of the 21st International Conference on Geometry and Graphics. Volume 3. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. Springer. (First Online: 27 September 2024), 2024
- [7] R. Hašek: Ceva's trisectrix. *GeoGebra*, 2023 <https://www.geogebra.org/m/twffkaxt>
- [8] R. Hašek: Quadrifolium. *GeoGebra*. 2024 <https://www.geogebra.org/m/dggxqkn9>
- [9] J. D. Lawrence: *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, Inc., 1972
- [10] Quadrifolium. In: *Wikipedia*, 2022 <https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrifolium>
- [11] E. W. Weisstein: Cycloid of Ceva. In: *MathWorld—A Wolfram Web Resource*, 2024 <https://mathworld.wolfram.com/CycloidofCeva.html>

Stromový tomograf

Sonic tree tomography

Marie Koptavá

*Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta, MENDELU
Zemědělská 3, 613 00 Brno, Česká republika
marie.koptava@mendelu.cz*

Abstract. Sonic tree tomography is an application problem from high school geometry. I created this task for the Math4U project in which our MENDELU team is participating. It is a task inspired by our arborists from the Faculty of Forestry and Wood Technology.

Keywords: Real word problem, analytic geometry, quadrilateral.

Klíčová slova: Aplikační úloha, analytická geometrie, čtyřúhelník.

1 Úvod

Stránka projektu Math4U je dostupná na adrese <https://math4u.vsb.cz/>. Portál je bezplatný a funguje v pěti jazykových verzích. Obsahuje úlohy k procvičení středoškolské matematiky rozdělené do 12 tematických oblastí. Z geometrických témat jsou to trigonometrie trojúhelníku, geometrie (zde jsou obsaženy stereometrické úlohy) a analytická geometrie.

Úkolem našeho týmu je sestavit 50 aplikačních úloh ze ŠŠ matematiky a geometrie. Tyto úlohy mají být různorodé námětem, obtížností a matematickým obsahem. Mají být použitelné jak v hodině matematiky na ŠŠ, tak k samostatnému studiu. Kromě úvodu do dané problematiky obsahují konkrétní slovní zadání úloh a také řešení krok za krokem. K některým úlohám jsou připojeny i příklady k samostatnému řešení.

Stromový tomograf je název jedné z geometrických úloh, které jsou v projektu zahrnuty. Jde o řešení skutečného problému, který měl kolega arborista z naší Lesnické a dřevařské fakulty. Rozsah článku nedovoluje vložit plné znění úlohy, řešení je proto zkráceno.

2 Stromový tomograf

Zdravotní stav stromu je důležité znát například v městských parcích kvůli bezpečnosti obyvatel. Kontrolují se hlavně staré stromy, u nichž je pravděpodobnější, že by nemusely být zdravé. Kmen poškozeného či nemocného stromu se může při zvýšené intenzitě větru zlomit a způsobit někomu zranění či hmotné škody. I majitelé menších nemovitostí mají mnohdy v blízkosti domu starý strom a nechtějí, aby spadl a poškodil jim například střechu.

Zdraví stromu je schopen posoudit arborista, který kontroluje, zda strom prosperuje nebo začíná schnout. Po obvodu stromu hledá dřevokazné houby a také místa, která jsou viditelně poškozená. Svoje pozorování

pak může doplnit měřením pomocí stromového tomografu nebo může využít tahové zkoušky. Poté může navrhnout různá opatření zvyšující bezpečnost. Například prořezání větví v koruně stromu, aby v případě velkého větru příliš nezatěžovala kmen.

Tahová zkouška funguje tak, že se do určité výšky kmene přiváže lano a za ně se potom tahá. K patě kmene jsou umístěna čidla, která měří průhyb kmene a jeho deformaci. Arborista má k dispozici mnoho vzorů, jak se má která dřevina chovat, a podle výsledků měření se porovnává konkrétní případ s nejlépe odpovídajícím vzorem. Výsledkem je zjištění, v jakém stavu je kořenový systém stromu, a zda se může zlomit v kmeni. Tato metoda je poměrně drahá. Měření trvá relativně dlouho a navíc je potřeba technik, který vyleze na strom a přiváže k němu lano, a po ukončení měření ho zase sundá. V poslední době se proto už tato metoda moc nepoužívá, místo toho je lepší využít stromový tomograf.

Měření stromovým tomografem

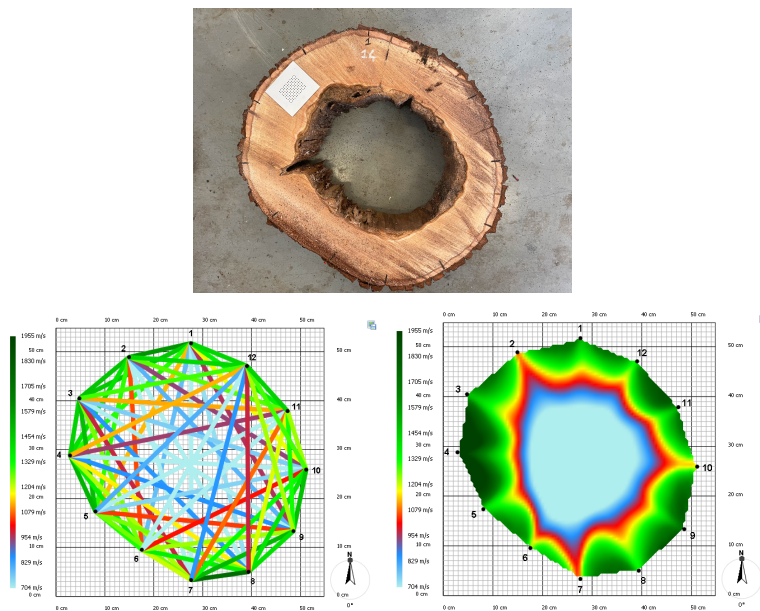
Stromový tomograf funguje na principu přenosu zvuku. Po obvodu kmene stromu se v určité výšce umístí 12 senzorů na hřebec. Hřeby se zatlučou skrz kůru stromu až ke dřevu. Umísťují se vždy do aktivního rostlinného pletiva, zde totiž strom dokáže velmi rychle regenerovat, a tak ho tyto hřeby nijak nepoškodí.

Arborista pak postupně klepe kladívkem na jednotlivé senzory. Přitom se měří rychlost, za kterou zvukový signál dorazí k ostatním sensorům. Zdravým dřevem zvuk projde rychle zatímco ve dřevě postiženém vnitřní vadou se doba přenosu signálu prodlužuje. Porovnáním naměřené a referenční hodnoty se proto dá najít například dutina ve dřevě už v rané fázi jejího vývoje.

Z naměřených rychlostí přenosu zvuku se dá sestavit tzv. rychlostní graf (viz. Obr. 1). U úseček, které spojují jednotlivé body je důležitá jejich barva. Ta udává rychlost, jakou zvukový signál prošel od jednoho bodu ke druhému. Počítačový program potom z naměřených rychlostí sestaví výsledný tzv. tomogram. Jde o dvourozměrný obraz, který znázorňuje zóny s různými vlastnostmi přenosu zvuku.

Na jednom stromě nestačí proměřit jediný průřez. Arborista jich naměří několik a přitom se zaměřuje na místa na kmeni, která jsou viditelně poškozená. Ze všech získaných informací si poté utvoří přehled o celkovém zdraví stromu.

Když je v kmeni zjištěna dutina, nemusí to ještě znamenat významný problém, pokud je vnější obvod kmene zdravý. Není možné přesně říct, kolik zdravého dřeva musí po obvodu být. To záleží na druhu dřeva, stáří stromu a na jeho průměru. Princip je stejný jako u ocelové trubky. Ta je taky pevná, i když je tyč dutá a materiál je jen po obvodu. Existuje zde několik pravidel. Jedno z nich říká, že v pořádku je, když je zdravá



Obr. 1: Rychlostní graf a výsledný tomogram kmene s dutinou.

třetina průřezu kmene stromu. Jiné pravidlo tvrdí, že u velmi starých stromů postačí, když je po obvodu jen třicetimetrová vrstva zdravého dřeva. Problém však mohou být kořeny.

Stromovým tomografem se dá poměrně přesně určit i stav kořenového systému. Provede se měření úplně u země a pak v několika dalších výškách. Pokud z výsledků programu je vidět, že se hniloba šíří kmenem zesponu nahoru, je pravděpodobné, že kořeny také nejsou v pořádku.

I tomograf má své omezení. Měření se neprovádí v zimě když mrzne, protože zmrzlou mízou se zvuk šíří jinak a výsledek by mohl být zkreslený.

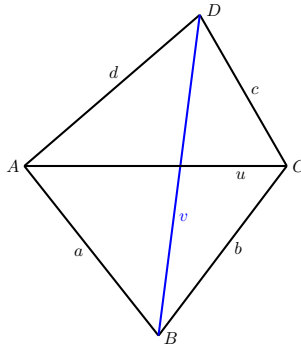
K sestavení tomogramu je potřeba znát vzdálenosti mezi všemi použitými senzory. Tato vzdálenost se dá změřit pomocí posuvného měřítka. U velmi starých a mohutných stromů však může být s posuvným měřítkem problém - jednoduše nemá potřebný rozsah. Co dělat, když se tedy nedají změřit všechny potřebné vzdálenosti mezi senzory? Pro jednoduchost problém omezíme na vzdálenosti mezi 4 senzory.

Úloha 1

Uvažujme obecný čtyřúhelník $ABCD$. V tomto čtyřúhelníku známe délky všech 4 stran a , b , c , d a délku jedné úhlopříčky AC . Určete délku druhé úhlopříčky BD . Ta už je příliš velká a nejde změřit naším měřidlem.

Řešení

Nejjednodušší řešení je samozřejmě planimetrické. Sestrojíme nejprve úsečku AC . Známe délky stran čtyřúhelníka AB a BC můžeme tedy nad úhlopříčkou AC sestrotit trojúhelník ABC . Podobně sestrojíme trojúhelník ADC a pak už stačí jen změřit délku úhlopříčky BD .



Obr. 2: Zadání úlohy 1.

Toto řešení provedené tužkou na papír nebude příliš přesné. Narýsujeme-li však totéž v rýsovacím programu na počítači (můžeme použít třeba GeoGebra), přesnost výsledku už bude dostačující.

Problém je, pokud arborista tento výpočet musí provést ne jednou, ale mnohokrát. Pak už by planimetrické řešení bylo časově náročné a nevýhodné. Lepší by bylo mít program, stačila by tabulka v Excelu, kam by se zadaly naměřené hodnoty a chybějící délku by spočítal počítač.

Úloha 2

Stejný problém vyřešte analyticky.

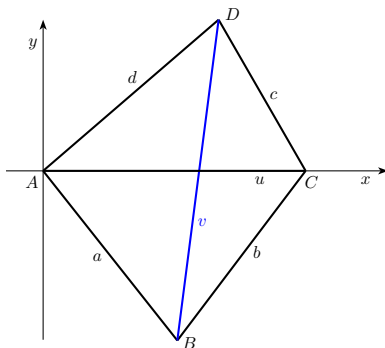
Řešení

Začneme vhodnou volbou souřadné soustavy. Počátek souřadné soustavy umístíme do bodu A , osu x zvolíme tak, aby na ní ležel bod C . Pro naši volbu potom budou souřadnice vrcholů čtyřúhelníka

$$A[0, 0], C[u, 0], B[b_1, b_2], D[d_1, d_2].$$

Potřebujeme určit souřadnice b_1 , b_2 , d_1 a d_2 , pak už bude snadné vypočítat hledanou délku úhlopříčky v jako délku vektoru \overrightarrow{BD} pomocí vztahu

$$v = \|\overrightarrow{BD}\| = D - B = \sqrt{(d_1 - b_1)^2 + (d_2 - b_2)^2}.$$



Obr. 3: Volba souřadné soustavy.

Nejprve budeme pracovat s trojúhelníkem $\triangle ACD$, abychom získali souřadnice bodu D . Určíme vektory \overrightarrow{AD} a \overrightarrow{CD}

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= D - A = (d_1, d_2), \\ \overrightarrow{CD} &= D - C = (d_1 - u, d_2),\end{aligned}$$

a vypočteme jejich délky

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AD}\| &= \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = d, \\ \|\overrightarrow{CD}\| &= \sqrt{(d_1 - u)^2 + d_2^2} = c.\end{aligned}$$

Umocněním dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých d_1 a d_2

$$\begin{aligned}d_1^2 + d_2^2 &= d^2, \\ (d_1 - u)^2 + d_2^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Řešením je

$$d_1 = \frac{1}{2u}(d^2 - c^2 + u^2), \quad d_2 = \sqrt{d^2 - d_1^2}.$$

Podobným způsobem z trojúhelníka $\triangle ABC$ vypočteme souřadnice bodu B . Využijeme vektory \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{CB} . Odsud získáme

$$b_1 = \frac{1}{2u}(a^2 - b^2 + u^2), \quad b_2 = -\sqrt{a^2 - b_1^2}.$$

Znaménko $-$ v poslední rovnosti je způsobeno tím, že bod B má y -ovou souřadnici zápornou (body B a D leží v opačných polorovinách určených přímkou AC .)

Úloha 3 – k samostatnému řešení

K zadání přidáme další senzor Z . Budeme znát vzdálenosti Z od vrcholů A a D , úkolem bude určit vzdálenost bodu Z od bodu B .

3 Závěr

Použití aplikačních úloh ve výuce matematiky a geometrie na SŠ je důležitým motivačním prvkem. Zároveň ale takové úlohy běžně nejsou dostupné ve známých učebních textech. Pro učitele tedy může být problém v některých partiích matematiky vhodné úlohy najít. Tento stav se nám snad podaří díky projektu změnit, máme nakonec i několik moc pěkných geometrických úloh. Příklady dostupné na dříve zmíněné stránce portálu Math4U hned po jejich odpilotování ve výuce.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu Math4U 3: Math Exercises for You 3 (2022-1-CZ01-KA220-SCH-000086821).

Literatura

- [1] iDNES.cz: *Speciální tomograf odhalí nemocný strom. Nejtěžší je vyhodnotit výsledky.* [online]. Dostupné z https://www.idnes.cz/hobby/zahrada/stromovy-tomograf-mereni-zdravi-stromu.A190226_103850_hobby-zahrada_bma [cit. 21. 6. 2024].
- [2] Thinktrees: *Interpreting Arbotom sonic tomography results – Example no.1.* [online]. Dostupné z <https://thinktrees.co.uk/interpreting-arbotom-sonic-tomography-results-example-no-1/> [cit. 21. 6. 2024].
- [3] Zdroj obrázků: *Projekt DYNATREE – Tree Dynamics: Understanding of Mechanical Response to Loading.* <https://starfos.tacr.cz/cs/projekty/LL1909>

Tvorba parametrických CAD modelů v prostředí Grasshopper – Rhinoceros

Parametric CAD modelling in Grasshopper – Rhinoceros environment

Jakub Kubát, Marta Hlavová

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní,

České vysoké učení technické v Praze

Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2

jakub.kubat@fs.cvut.cz

marta.hlavova@fs.cvut.cz

Abstract. In the node-based programming environment Grasshopper, distributed with Rhinoceros CAD software, user can chain together graphically represented commands and operations to create an algorithm capable of generating parameter-defined 3D geometry. Grasshopper is useful primarily when geometries more complex than those easily created through manual means are desired. In this paper two use cases are presented - an interactive implementation of the de Casteljau algorithm for Bézier surfaces and a proposed parameter-driven CAD representation of the geometry of lower human airways idealized geometry.

Keywords: CAD, programming, visualization

Klíčová slova: CAD, programování, vizualizace

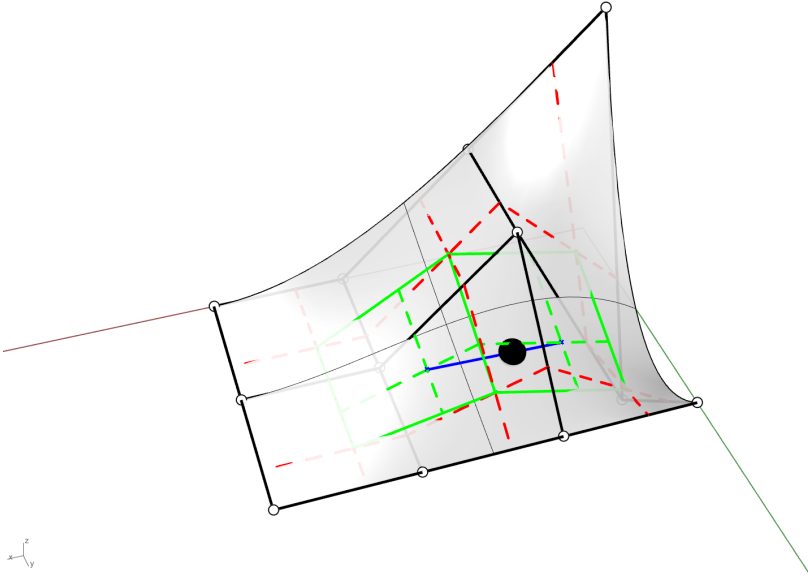
1 Úvod

3D modelář Rhinoceros je na Fakultě strojní ČVUT rozšířeným nástrojem využívaným například při výuce předmětu Počítačová grafika a obznanost s ním je poměrně vysoká mezi zaměstnanci i studenty. Jde o CAD systém uzpůsobený pro práci s definičními geometriemi NURBS objektů, které uživateli intuitivně zpřístupňuje jak graficky, tak při používání vestavěných nástrojů. Rhinoceros obsahuje vlastní vývojové prostřední Grasshopper, které umožňuje za pomoci implementovaných nástrojů vlastní vizuální programovací jazyk a knihoven vytvářet skripty a programy generující požadované geometrie. Grasshopper má vlastní uživatelské rozhraní, přes které se dají v reálném čase ovládat vstupní parametry těchto programů a tím je činit interaktivními.

Pro ukázkou využití schopností uživatelského rozhraní bude v kapitole 2 představen projekt Interaktivní vizualizace de Casteljau algoritmu pro Bézierovy plochy, jako příklad práce zaměřené na programování CAD geometrie pak v kapitole 3 projekt Parametrický CAD model idealizované geometrie části dolních cest dýchacích.

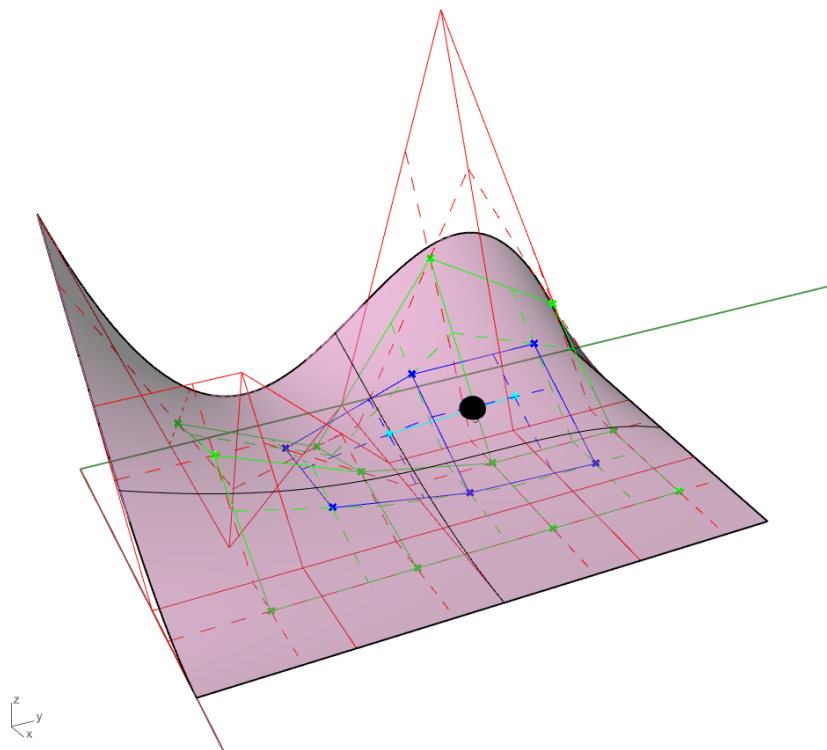
2 De Casteljau algoritmus

V rámci výuky předmětu Počítačová grafika jsou studenti seznámeni s Bézierovými plochami a de Casteljau algoritmem pro konstrukci jejich bodů. Pro potřeby výuky bylo výhodné vytvořit interaktivní vizualizaci tohoto algoritmu pro větší přiblížení jeho funkce.



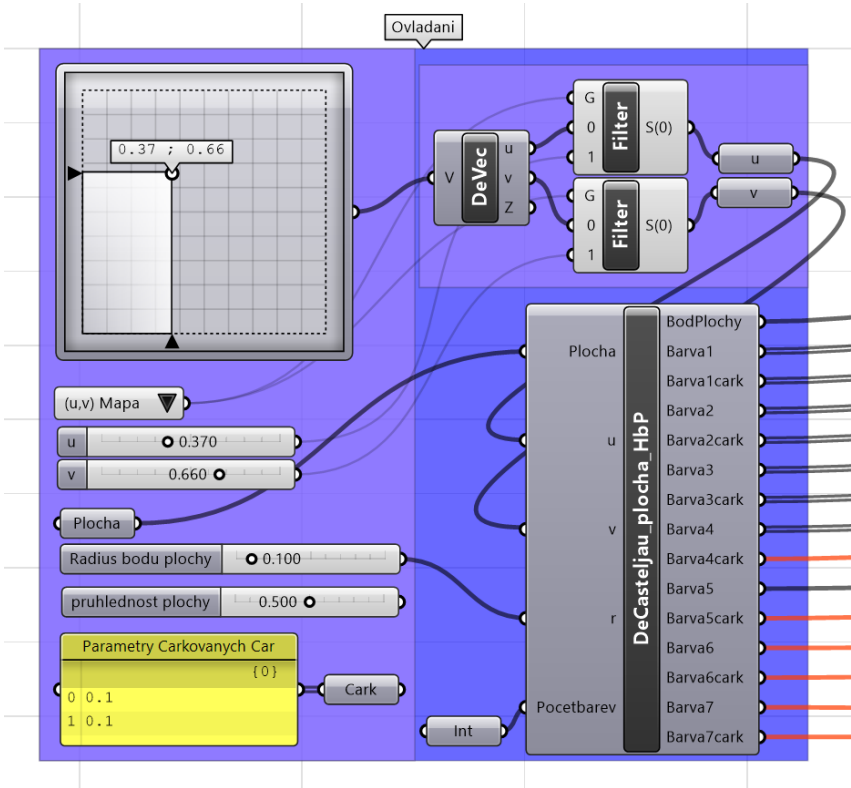
Obr. 1: De Casteljau algoritmus na Bézierově ploše [1]

Aby studenti mohli vizualizaci sami ovládat a dále ji prozkoumávat co nejpřístupnější cestou, byla vytvořena v grafickém programovacím prostředí Grasshopper v rámci modeláře Rhinoceros. Vizualizace je univerzální a de Casteljau algoritmem nalezne bod s unikátními u, v souřadnicemi jakékoliv jednoplátové Bézierovy plochy s uniformní parametrizací $I = [0, 1]^2$. Uživatelské rozhraní používané pro ovládání vizualizace bylo vytvořeno z grafických komponent (bloků) Grasshopper a umožňuje vybrat předem vymodelovanou plochu, na které se má konstrukce vygenerovat. Bod, pro který se konstrukce vykreslí, je zadáván pomocí křivočarých souřadnic z oboru parametrizace. Souřadnice se dají zadat buď pro každý parametr zvlášť (umožňující snadné ukotvení jednoho z nich na požadované hodnotě) nebo interaktivněji z takzvané UV mapy, kde jsou z 2D oboru parametrizace hodnoty parametrů vybírány přímo myší, což umožňuje s vykresleným bodem po zadané ploše volně „plout“.



Obr. 2: Použití vizualizace v Rhinoceros

Rekurzivní prvky de Casteljau algoritmu byly napsány v jazyce Python v rámci vývojového prostředí Grasshopper a prezentovány detailněji na konferenci Studenstké tvůrčí činnosti FS ČVUT [1]. Možnost psaní Python skriptů je v Grasshopper implementována pomocí bloku „Python“, který může přijímat vstupy z ostatních bloků a také generovat výstupy interpretovatelné jinými bloky v závislosti na vnitřně spouštěném skriptu. Knihovna `ghpythonlib` pro Python zpřístupnila příkazy Grasshopper a vytváření geometrie tak bylo velmi přímočaré. Jako vstupní parametry algoritmu se načetly řídicí body zvolené Bézierovy plochy, její stupně ve směrech jednotlivých parametrů a křivočaré souřadnice konstruovaného bodu plochy. V Python skriptu jsou následně dopočítány veškeré konstrukce de Casteljau algoritmu a souřadnice jeho význačných bodů. Na jejich základě jsou pomocí příkazů z použité knihovny vytvářeny geometrické objekty, které jsou roztříděny do výstupních seznamů.



Obr. 3: Ovládání vizualizace v Grasshopper

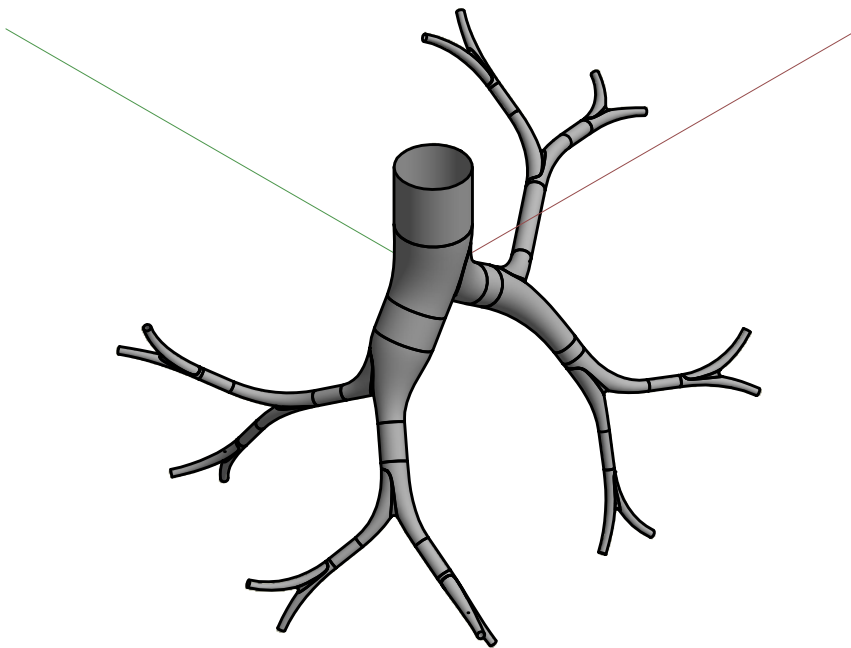
Všem prvkům z jednotlivých výstupních seznamů jsou mimo programovací jazyk Python, za pomoci grafických nástrojů Grasshopper, přiřazeny materiály a jsou vykresleny na obrazovce. Materiály, resp. nastavení omezená pouze na difúzní barvu a průhlednost, jsou vytvářeny pomocí bloků Grasshopper a jsou interaktivně nastavitelné kdykoliv v průběhu vizualizace. Stejně tak se dají upravit vlastnosti čárkovaných čar, vykresleného bodu plochy a zobrazení plochy samotné.

Rhinoceros tuto geometrii interpretuje jako každou jinou, a tak lze pomocí uživatelských nastavení softwaru se zobrazením dále pracovat. Ukázkou je rozdíl neupraveného vzhledu na obrázku 2 a upraveného na obrázku 1.

3 Geometrie dolních lidských cest dýchacích

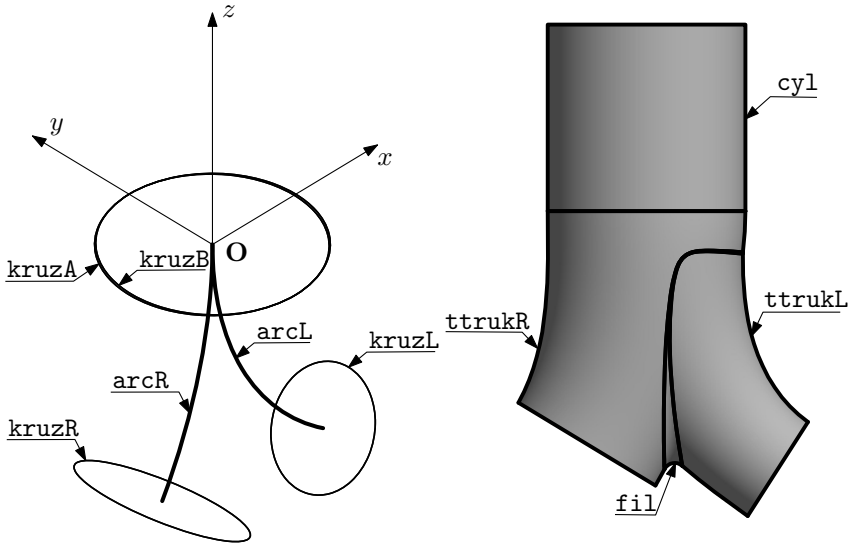
Znalost geometrie vzduch distribuujících struktur v lidských plicích je nedílnou součástí výzkumu proudění vzduchu a depozice jím unášených

částic v právě těchto strukturách. Běžné metody snímání a měření struktur v plicích jsou stále značně omezeny rozlišením a časovou náročností na rekonstrukci požadované snímané geometrie. Je tedy žádoucí vytvořit popis idealizovaný, který je reprezentativní náhradou skutečných struktur. [2]



Obr. 4: Výsledná idealizovaná geometrie části dolních cest dýchacích [3]

V prostředí Grasshopper modeláře Rhinoceros byl vytvořen skript generující průdušky a jemnější struktury hlouběji v plicích na základě pěti souborů vstupních rozměrových parametrů, za aplikace postupu představeného v [3]. Rozměrové parametry byly zvoleny na základě několika nejpopulárnějších morfometrických studií a umožňují vygenerovat geometrii z jakékoliv sady měřených i generovaných dat. Geometrie je generována pomocí skriptu napsaného v jazyce Python. Samotný postup generace jednoho větvení (zobrazeno na obrázku 5) se skládá z několika manipulací s vygenerovanou geometrií a její modifikací jako je oříznutí a obecné prostorové transformace. Výsledný idealizovaný model lze použít jako vstupní geometrii v síťovacích programech pro potřeby simulací tekutin.



Obr. 5: Ukázka částí konstrukce větvení idealizované geometrie [3]

4 Závěr

Schopnosti skriptovacích nástrojů vývojového prostředí Grasshopper modeláře Rhinoceros byly představeny na dvou projektech vypracovaných během studia na FS ČVUT. Grasshopper umožňuje vytváření jak interaktivních programů, tak i těch zaměřených na generování jednoho výstupu s velkým počtem operací potřebných k jeho vytvoření.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu SGS24/119/OHK2/3T/12 Pokročilé metody matematicko-geometrického modelování ve strojírenství.

Literatura

- [1] J. Kubát: *Vývoj interaktivního CAD modelu v prostředí rhinograsshopper*, konference STČ ČVUT, roč. 20, č. 1, s. 3, 2024
- [2] K.Ahookhosh, O. Pourmehran, H. Aminfar, M. Mohammadpourfard, M. M. Sarafraz, H. Hamishehkar, *Development of human respiratory airway models: A review*, European Journal of Pharmaceutical Sciences, roč. 145, s. 105–233, 2020
- [3] J. Kubát: *Parametrický CAD model idealizované geometrie dolních cest dýchacích*, bak. pr., České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky, 2024

Factorization of polynomials over quaternions and dual quaternions

Michal Molnár

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
email: mysymol@mmolnar.sk*

Abstract. Algebras of quaternions and dual quaternions are used as a representation of Euclidean transformations in space. Polynomials over these algebras parametrize motions, spherical or spatial. A natural question to ask, is whether such motion can be realised via physical mechanism, constituting of rigid links and movable joints. The factorization of given polynomial also reveals what should the desired mechanism look like. In this paper we provide basic algorithms for factorization and apply it to creation of mechanisms.

Keywords: Quaternions, dual quaternions, polynomials, factorization.

1 Introduction

The use of quaternions and dual quaternions in geometry is well known. The unit quaternions are a $2 : 1$ cover of $SO(3)$ – group of rotations in 3-space about an axis through origin. The unit dual quaternions are similarly a $2 : 1$ cover of $SE(3)$, which includes all euclidean transformation in space. Adding a real parameter allows us to change the transformation in time, hence parametrizing a rational motion (see [5]). Spherical in the case of quaternions, spatial in the case of dual quaternions.

Since (dual) quaternion multiplication corresponds to composition in $SO(3)$ (and $SE(3)$), the factorization of said polynomials corresponds to decomposition of given motion. This has been of interest in mechanism theory ([3], [4]), since mechanical joints can only realise limited types of motion, typically rotations and translations. Hence a prescribed motion needs to be decomposed into a series of simpler ones.

In this paper we look into the factorization procedure for polynomials over both algebras. We will bear the application in mechanism construction in mind and provide examples. In section 2 we deal with the case of polynomials over quaternions. The section 3 will deal with the case of dual quaternions. We explain the issues of working with the dual numbers in 3.1 and conclude with description of Bennett’s mechanism in 3.2.

The section 3.1 on pitfalls of dual quaternions, as well as all examples and pictures are an own work. The factorization algorithms are already well-known.

2 Factorization of quaternion polynomials

By *quaternion polynomial*, we understand a polynomial in single indeterminate t , with quaternion coefficients. In our case, the t will commute

with the quaternions. This is a natural behaviour, since it represents a real time parameter of our motion.

2.1 Computing factors

It is important to note, that the factorization of quaternion polynomial is not unique, due to their non-commutativity. However, there are classes of quaternions, which are unique to the polynomial (see [2]), and which determine what factors are possible at each step. Those classes are defined by their *characteristic polynomials*, see [1]. The characteristic polynomial of quaternion q is the real polynomial

$$P_q(t) = (t - \bar{q})(t - q) = t^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(q)t + |q|^2.$$

The classes related to a polynomial $P(t)$ appear naturally when we multiply the polynomial by its conjugate $\bar{P}(t)$. Since the conjugation flips the order of factors, for a potential factorization $P(t) = (t - q_1)(t - q_2) \cdots (t - q_n)$ we get

$$P(t) \cdot \bar{P}(t) = (t - q_1)(t - q_2) \cdots (t - q_n) \cdot (t - \bar{q}_n) \cdots (t - \bar{q}_2)(t - \bar{q}_1).$$

A characteristic polynomial of q_n formed in the middle. Since it is real and hence commutes with the other factors, we can move it out of the way and obtain other characteristic polynomials. The result is as follows

$$P(t) \cdot \bar{P}(t) = P_{q_1}(t) \cdot P_{q_2}(t) \cdots P_{q_n}(t).$$

The polynomial $P(t) \cdot \bar{P}(t)$ is called the *norm polynomial* of $P(t)$, we will denote it $P\bar{P}(t)$. Observe, that $P_q(t)$ is a norm polynomial of $t - q$.

More importantly, we can use the factorization of $P\bar{P}(t)$ to factorize $P(t)$. Using some quadratic factor $R(t)$ of $P\bar{P}(t)$, we can find a quaternion polynomial $Q(t)$ and quaternions a, b such that $P(t) = Q(t)R(t) + at + b$. From definition of $P\bar{P}(t)$ it is clear, that $R(t)$ is a factor of

$$(at + b) \cdot (\bar{a}t + \bar{b})$$

and therefore a characteristic polynomial of $-a^{-1}b$. The linear polynomial $(t + a^{-1}b)$ is then a common right factor of $P(t)$ and $R(t)$.

2.2 Example

Let us consider a quaternion polynomial $P(t) = t^2 - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})t + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Its norm polynomial is

$$P\bar{P}(t) = t^4 + 3t^2 + 2,$$

which can be factored as $P\bar{P}(t) = (t^2 + 1) \cdot (t^2 + 2)$. This means that the factors of $P(t)$ belong to the classes defined by $t^2 + 1$ and $t^2 + 2$ respectively.

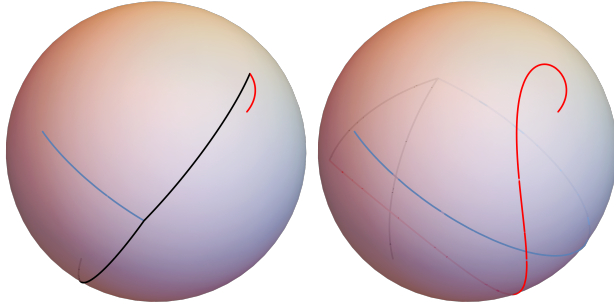


Fig. 1: Motion given by polynomial $P(t)$ enacted by rotational linkage (black). Trajectory of the point $(5/13, 12/13, 0)$ is drawn in red. The first link rotates the axis of second rotation along the blue trajectory. Second link rotates the point itself.

For the class given by $t^2 + 1$, we may see that

$$P(t) = 1 \cdot (t^2 + 1) + (-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})t - 1 + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Denoting $a = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ and $b = -1 + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, we may compute the right factor $t + a^{-1}b = t - \mathbf{i}$. Dividing the polynomial $P(t)$ from the right will get us the first factorization

$$P(t) = (t - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (t - \mathbf{i}).$$

This gives us a way to decompose the spherical motion into two rotations given by $(t - \mathbf{j} - \mathbf{k})$ and $(t - \mathbf{i})$ respectively. The decomposition then allows us to create a mechanical linkage, whose joints would correspond to the described rotation. We may see how this linkage moves a point on a sphere in figure 1.

The right factor of the class given by $t^2 + 2$ is $t - \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$. Hence the second factorization has the form

$$P(t) = \left(t - \frac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3} \right) \cdot \left(t - \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right).$$

This allows us to create a different linkage, that represents the same motion, see figure 2.

3 Factorization of dual quaternion polynomials

The history of factorization of dual quaternion polynomials started just over a decade ago with [3]. The idea is simple – repeat the work we did for quaternions. However, the dual unit ε makes things a bit more

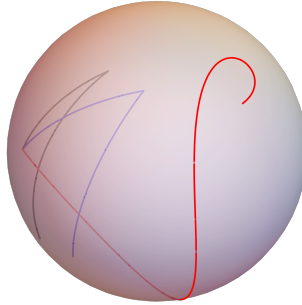


Fig. 2: Motion given by polynomial $P(t)$ enacted by different linkages (blue and black).

complicated. The dual quaternions are not a division algebra, namely division by multiples of ε is impossible.

Some of these issues can be avoided by restricting ourselves on specific types of polynomials. In some cases these restrictions may be too strong and a factorization may not exist. However, this can be mitigated in applications, see [4].

3.1 Pitfalls of dual quaternions

Just like in the case of quaternions, we may define the *characteristic polynomial* of dual quaternion h to be $P_h(t) = (t - \bar{h})(t - h)$ and the *norm polynomial* of dual quaternion polynomial $H(t)$ as $H\bar{H}(t) = H(t) \cdot \bar{H}(t)$. In general, both these polynomials have dual coefficients. To be able to factor the norm polynomial, we prefer to work with real numbers.

The first practical trick is to restrict ourselves to such polynomials, whose norm polynomial is real. This is referred to as the *Study's condition*. From the geometric point of view, this is no loss of generality. All rational motions can be expressed by polynomials over dual quaternions, whose norm polynomial is real, see [5]. The polynomials satisfying the Study's condition are called *motion polynomials*.

The second restriction tightens our options for characteristic polynomials. We will factor the norm polynomial into real characteristic polynomials. From geometric point of view, we restrict ourselves to rotations and translations (see [7]). However, other motions, like the Darboux motion, can also be expressed by linear dual quaternion polynomial.

So let us see what happens if we repeat the steps of factorization of quaternion polynomials. Let us write our polynomial as $H(t) = P(t) + \varepsilon Q(t)$, where $P(t)$ and $Q(t)$ are polynomials with quaternion coefficients.

The norm polynomial can be expressed as

$$H\overline{H}(t) = P(t) \cdot \overline{P}(t) + \varepsilon(P(t)\overline{Q}(t) + Q(t)\overline{P}(t)),$$

which for a motion polynomial $H(t)$ is equal to $P\overline{P}(t)$. Now, we factor the norm polynomial into quadratic real polynomials and choose an arbitrary factor $M(t)$ to be our characteristic polynomial. We get one of the following:

1. $M(t)$ is not a divisor of $P(t)$. Then, similarly to the quaternion case, the common factor of $M(t)$ and $H(t)$ is unique.
2. $M(t)$ is a divisor of both $P(t)$ and $Q(t)$. Then any factor of $M(t)$ is also a factor of $H(t)$.
3. $M(t)$ is a divisor of $P(t)$ and a divisor of $Q\overline{Q}(t)$. Then any common factor of $M(t)$ and $H(t)$ is one of the common factors of $M(t)$ and $Q(t)$.
4. $M(t)$ is a divisor of $P(t)$, but not a divisor of $Q\overline{Q}(t)$. Then there is no common factor of $M(t)$ and $H(t)$.

Cases 2 and 3 yield infinitely many factors. The possible choices for each case are described in [7]. The case 4 does not yield a factor and in some cases may be unavoidable, meaning there is no factorization for given polynomial. We may still decompose the motion itself, see [4].

3.2 Example

Let us now consider the motion polynomial

$$H(t) = t^2 + (-\mathbf{i} - \mathbf{k})t + (1 + \mathbf{i} - \mathbf{k}) + \varepsilon((\mathbf{j} + 2\mathbf{k})t + (2 - 2\mathbf{i} + \mathbf{j})).$$

Its norm polynomial is $H\overline{H}(t) = t^4 + 4t^2 + 3$, which can be factored as $(t^2 + 1) \cdot (t^2 + 3)$. Note, that neither $t^2 + 1$ nor $t^2 + 3$ are divisors of $P(t) = t^2 + (-\mathbf{i} - \mathbf{k})t + (1 + \mathbf{i} - \mathbf{k})$. Hence both options lead to case 1, where the right factor is unique.

The choice of $t^2 + 1$ as a characteristic polynomial leads to the factor $t - \mathbf{j} + \varepsilon(-\mathbf{i} - 2\mathbf{k})$ and the first factorization

$$H(t) = (t - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + \varepsilon(\mathbf{i} - \mathbf{j})) \cdot (t - \mathbf{j} + \varepsilon(-\mathbf{i} - 2\mathbf{k})).$$

The second factorization can be obtained by using $t^2 + 3$. We get

$$H(t) = (t - \mathbf{j} + \varepsilon\mathbf{i}) \cdot (t - \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \varepsilon(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})).$$

We can also use the fact that $H\overline{H}(t)$ is a real polynomial and that it can be factored using the known factorizations of $H(t)$ as

$$\begin{aligned} H\overline{H}(t) &= (t - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + \varepsilon(\mathbf{i} - \mathbf{j})) \cdot (t - \mathbf{j} + \varepsilon(-\mathbf{i} - 2\mathbf{k})) \cdot \\ &\quad \cdot (t + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} + \varepsilon(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})) \cdot (t + \mathbf{j} - \varepsilon\mathbf{i}). \end{aligned}$$

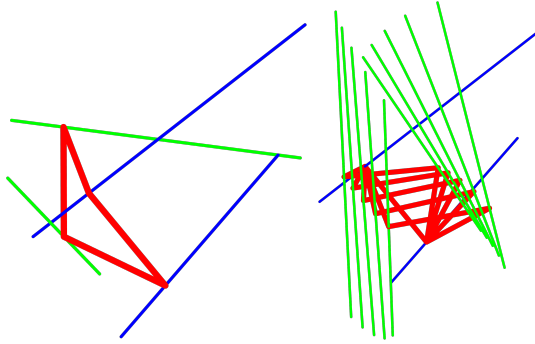


Fig. 3: Bennett's mechanism based on the factorizations of polynomial $H(t)$. Stationary on the left, in various states of motion on the right.

This defines another mechanical linkage. Since these four joints compose to an identity, we may close the first and the last link in a loop, creating a *Bennett's mechanism*, see [6]. In generic case, a spatial mechanism with four links and four joints has a -1 degree of freedom, hence it should not move. However Bennett's mechanism moves. A version based on our polynomial can be seen in figure 3.

4 Conclusion

We have described the factorization process for polynomials with quaternion and dual quaternion coefficients. In the future we plan to study polynomials over Clifford algebras.

References

- [1] B. Kalantari: *Algorithms for quaternion polynomial root-finding*, Journal of Complexity, 29:302–322, 2013
- [2] B. Gordon, T. S. Motzkin: *On the zeros of polynomials over division rings I.*, Transactions of the American Mathematical Society, 116:218–226, 1965
- [3] G. Hegedüs, J. Schicho, H.-P. Schröcker: *Factorization of rational curves in the study quadric*, Mechanism and Machine Theory, 69:142–152, 2013
- [4] Z. Li, J. Schicho, H.-P. Schröcker: *Factorization of motion polynomials*, Journal of Symbolic Computation, 92:190–202, 2019
- [5] B. Jüttler: *Über zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II, 202:117–232, 1993
- [6] G. T. Bennett: *A new mechanism*, Engineering, 76:777, 1903
- [7] M. Molnár: *Factorization of quaternion and dual quaternion polynomials*, Master thesis, 2024

Henrici's flexible hyperboloid and snapping spatial four-bars

Hellmuth Stachel

*Institute of Discrete Mathematics and Geometry
Vienna University of Technology, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien
stachel@dmg.tuwien.ac.at*

Abstract. Henrici's flexible hyperboloid consists of rods chosen as generators of both reguli of a one-sheeted hyperboloid. If each crossing point between two rods is materialized as a spherical joint, then the hyperboloid can vary within a confocal family terminated by two flat poses. After presenting the main properties of Henrici's hyperboloid, we restrict the variation to a quadrangle with sides along generators. This induces a one-parameter transformation of the quadrangle where the side lengths are preserved. When we connect points of opposite sides by taut strings along additional generators, then the strings remain taut during the transformation. However, a continuous transformation is possible only with spherical joints at the four vertices.

As an alternative, we can pick out two sufficiently close poses. Then, it is possible to find appropriate involute joints at the vertices that enable a physical model of this spatial four-bar to snap from one pose into the other, provided that the material of the bars and clearances of the joints admit tiny deformations. Also a converse is true: For each snapping four-bar we find a hyperboloid such that the two poses originate from a Henrici flex. Consequently, a net of taut strings spanned along additional generators of the hyperboloid is compatible with the snapping of the quadrangular frame.

Keywords: Henrici's hyperboloid, confocal quadrics, spatial four-bar, snapping structure.

1 Introduction

At the turn from the 19th to the 20th century it became fashion to produce physical models for visualizing mathematical objects and phenomena. These models were spread all over the world due to catalogues in form of books [5]. Today only at a few places some of these historical models are available, e.g., at the Vienna Institute of Technology under <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/modelle/>.

We begin with the explanation of Henrici's hyperboloid (Figure 1). It was found in 1874 by Olaus Henrici, a German mathematician, who became director of the Laboratory of Mechanics at the University College London. The flexibility of this structure follows from properties of confocal central quadrics (see, e.g., [2]). A similar structure exists for hyperbolic paraboloids.

The restriction of the hyperboloid to a quadrilateral of four generators leads to a flexible quadrangle where the flex is compatible with a net of taut strings spanned along additional generators between opposite sides.

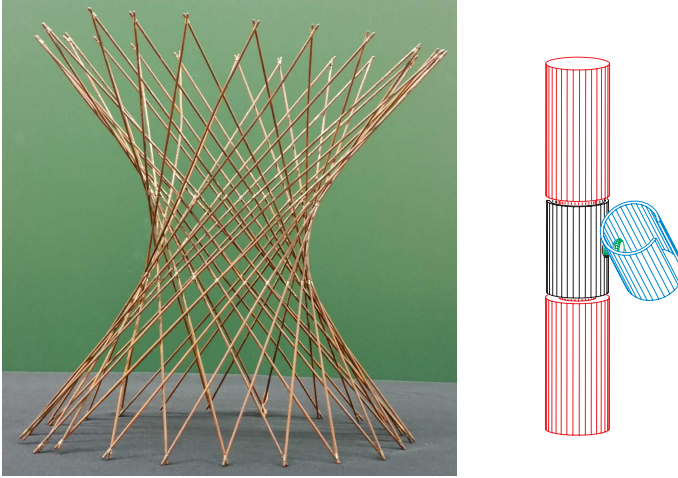


Fig. 1: Left: Henrici's flexible hyperboloid. Right: H. Wiener's design of approximate spherical joints.

We discuss the question whether the spherical joints can be replaced by revolute joints which extends the quadrangle to a *spatial four-bar*, i.e., a closed kinematic 4R-chain. It is well-known that a spatial four-bar is continuously flexible only in three cases: Either the axes are parallel or concurrent, or the common perpendiculars between neighboring axes form an isogram, i.e., a quadrangle with opposite sides of equal lengths. In the latter case we obtain a Bennett mechanism (see, e.g., [2, p. 555–559]).

2 Henrici's hyperboloid

The one-parameter family of quadrics being confocal with the triaxial ellipsoid \mathcal{E} with semiaxes a, b, c is given as

$$F_k(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} = 1 \quad (1)$$

with the parameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}$. If $a > b > c > 0$, then this family contains (see Figure 2)

$$\text{for } \begin{cases} -c^2 < k < \infty & \text{triaxial ellipsoids,} \\ -b^2 < k < -c^2 & \text{one-sheeted hyperboloids,} \\ -a^2 < k < -b^2 & \text{two-sheeted hyperboloids.} \end{cases} \quad (2)$$

Their curves of intersections with the coordinate planes share the respective focal points. As the limits for $k \rightarrow -c^2$ and $k \rightarrow -b^2$ occur 'flat' quadrics bounded by one of the focal conics (see [1, p. 137]).

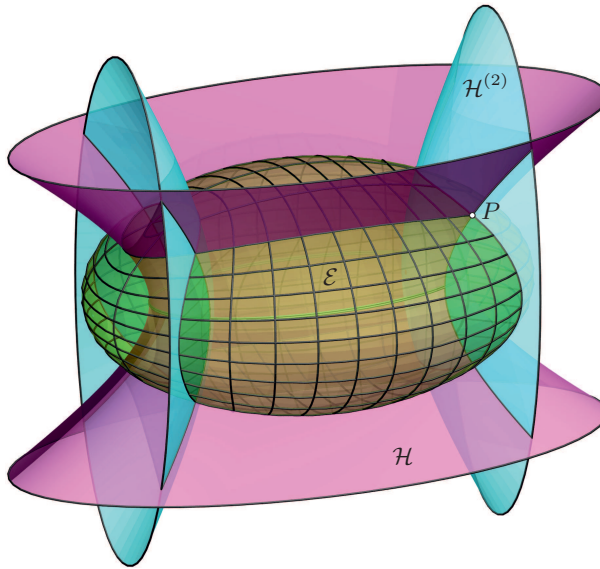


Fig. 2: Confocal central quadrics. The curves of intersection between the triaxial ellipsoid \mathcal{E} and the confocal hyperboloids \mathcal{H} and $\mathcal{H}^{(2)}$ are lines of curvature on \mathcal{E} .

Through each given point P in space away from the common planes of symmetry, the confocal family sends three mutually orthogonal surfaces, one of each type (Figure 2). Due to Dupin's theorem, the confocal surfaces intersect each other along curvature lines. The respective parameters (k_1, k_2, k_3) of the ellipsoid, the one-sheeted and the two sheeted hyperboloid passing through P are called *elliptic coordinates* of P , where $k_1 > -c^2 > k_2 > -b^2 > k_3 > -a^2$. They are related to the Cartesian coordinates (x, y, z) via

$$x^2 = \frac{(a^2 + k_1)(a^2 + k_2)(a^2 + k_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2 + k_1)(b^2 + k_2)(b^2 + k_3)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad (3)$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + k_1)(c^2 + k_2)(c^2 + k_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Apparently, eight points in space, symmetrically placed w.r.t. the coordinate frame, share the elliptic coordinates.

Suppose that the coordinate k_2 varies, while k_1 and k_3 and the signs of Cartesian coordinates remain constant. Then, this induces a smooth transformation of the one-sheeted hyperboloid \mathcal{H} within the confocal family, while its points run along orthogonal trajectories of the hyperboloids.

From (3) follows that aligned points of \mathcal{H} , i.e., points which are mutually conjugate with respect to \mathcal{H} , remain aligned during the flex. Thus, \mathcal{H} undergoes an affine motion. During the variation of k_2 the angle between any two intersecting generators of \mathcal{H} varies as well as the distribution parameter of the generators. Therefore spherical joints are necessary at all crossing points of Henrici's hyperboloid (Figure 1, right).

Theorem 1. *Referring to the elliptic coordinates as explained before, when k_2 varies, while k_1, k_3 remain unchanged, then during the induced smooth transformation of the hyperboloid \mathcal{H} the points placed on any generator remain aligned and their mutual distances are preserved.*

A similar result holds for confocal hyperbolic paraboloids.

3 Snapping spatial four-bars

Let $P_1P_2P_3P_4$ be a quadrangle with sides located on generators of the hyperboloid \mathcal{H} . Then during the flex of \mathcal{H} we obtain spatial quadrangles $P'_1P'_2P'_3P'_4$ with equal side lengths, i.e., $\overline{P_iP_{i+1}} = \overline{P'_iP'_{i+1}}$ for all $i \in \{1, \dots, 4\}$ (subscripts modulo 4); we call two quadrangles with equal side lengths *isometric*. Moreover, as shown in Figure 3, in the interior of the quadrangles additional generators of \mathcal{H} can be materialized as strings, and they remain taut during the flex.

For any given quadrangle, there exists a two-parametric set of isometric quadrangles, up to rigid motions, since there is a free choice of the interior angle $\sphericalangle P_4P_1P_2$ and of the bending angle along the diagonal P_4P_2 between the planes $[P_4, P_1, P_2]$ and $[P_2, P_3, P_4]$. The pairs of isometric quadrangles $P_1 \dots P_4$ and $P'_1 \dots P'_4$ obtained by Henrici's movement are in a particular relative position: The pedal points of the common perpendicular between the lines $[P_i, P_{i+1}]$ and $[P'_i, P'_{i+1}]$ are corresponding under the induced isometry between the generators. Also a converse is true.

Theorem 2. *For any two isometric quadrangles $P_1 \dots P_4$ and $P'_1 \dots P'_4$ there exists either a hyperboloid \mathcal{H} or a hyperbolic paraboloid \mathcal{P} passing through the sides of $P_1 \dots P_4$ such that we obtain a congruent copy of $P'_1 \dots P'_4$ according to Henrici's transition from \mathcal{H} or \mathcal{P} to a confocal quadric.*

The proof is based on the singular-value decomposition of the unique affine transformation that sends $P_1 \dots P_4$ and $P'_1 \dots P'_4$. This result reveals that Henrici's flexing hyperboloid is not such a particular event as one could presume.

From now on we concentrate on two poses of a flexing isometric quadrangle and ask if the spherical joints at the vertices can be replaced by revolute joints. This results in a spatial four-bar which possibly can snap

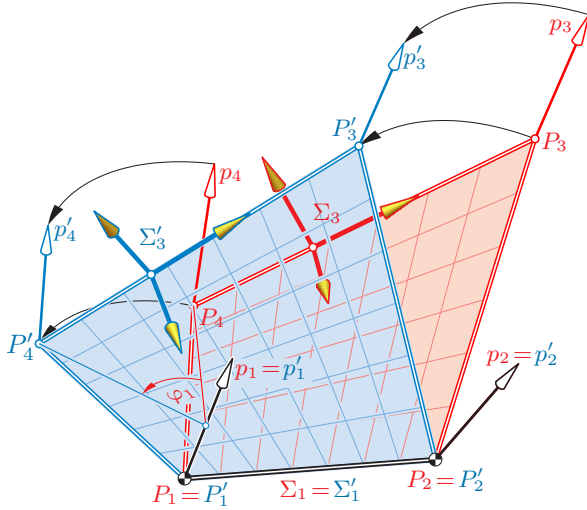


Fig. 3: Snapping spatial four-bar with the poses $P_1 \dots P_4$ and $P'_1 \dots P'_4$, while the base Σ_1 with P_1P_2 and the axes p_1 and p_2 is kept fixed.

between two poses, due to slight deformations of the sides and clearances of the joints. We speak of a *snapping four-bar* (Figure 4).

Contrary to the situation in the plane or on the sphere, in space there is a difference between spatial quadrangles and spatial four-bars: The quadrangle $P_1 \dots P_4$ consists of four sides only, while the four-bar is a loop of four rigid bodies $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4$ with four revolute joints. We assume that the body Σ_i for $i \in \{1, \dots, 4\}$ contains the vertices P_i and P_{i+1} , and the corresponding revolute axes p_i and p_{i+1} . Then, the two poses of any snapping four-bar define four displacements

$$\delta_i: \Sigma_i \rightarrow \Sigma'_i, P_i \mapsto P'_i, P_{i+1} \mapsto P'_{i+1}, p_i \mapsto p'_i, p_{i+1} \mapsto p'_{i+1}.$$

The composition $\delta_{i-1}^{-1} \circ \delta_i$ must be a rotation as it keeps the point P_i fixed. Consequently, once the displacements $\delta_1, \dots, \delta_4$ are defined, the axis p_i is uniquely determined as the line which remains pointwise fixed under $\delta_{i-1}^{-1} \circ \delta_i$.

This leads to a four-parametric choice of revolute axes for any two given isometric quadrangles. We emphasize one solution which is based on the Henrici-position according to Theorem 2. We define δ_i for all i as the screw motion along the common perpendicular of $[P_i, P_{i+1}]$ and $[P'_i, P'_{i+1}]$, that sends the quadrangle's side P_iP_{i+1} to $P'_iP'_{i+1}$.

As shown in Figure 3 with the fixed body Σ_1 , the displacement of Σ_3



Fig. 4: Physical model of a snapping four-bar, produced by D. Huczala

to Σ'_3 is induced by the rotations ρ_4 about p_4 through φ_4 and ρ_1 about p_1 through φ_1 . However, the same displacement is the composition of the rotation ρ_3^{-1} of Σ_3 against Σ_2 about p_3 through $-\rho_3$ and ρ_2^{-1} about p_2 through $-\varphi_2$. This means,

$$\rho_1 \circ \rho_4 = \rho_2^{-1} \circ \rho_3^{-1}. \quad (4)$$

Conversely, this condition implies that the displacement of Σ_3 to Σ'_3 can be obtained in two ways which defines a 4R-loop-structure. This condition can easily be expressed in terms of dual unit quaternions. When expanded in coordinates, it results in necessary and sufficient conditions for snapping four-bars in the form of the solvability of an overdetermined system of six equations for the unknown angles $\varphi_1, \dots, \varphi_4$.

Note that this condition for snappability depends on the relative positions of the revolute axes p_1, \dots, p_4 , but not on the specification of the vertices P_i on the respective axes p_i . With other words, one snapping four-bar implies a four-parametric set of snapping four-bars, since the four vertices of the quadrangle can independently be modified on the corresponding axes. This means, for example, that each Bennet-mechanism leads to numerous continuously flexible four-bars just by changing the vertices P_i on the corresponding axes p_i .

References

- [1] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics*, Springer Spectrum, Berlin, Heidelberg 2016
- [2] B. Odehnal, H. Stachel, G. Glaeser: *The Universe of Quadrics*, Springer Spectrum, Berlin, Heidelberg 2020
- [3] H. Stachel: *On the flexibility and symmetry of overconstrained mechanisms*, Phil. Trans. R. Soc. A **372**, num. 2008, 20120040 (2014)
- [4] W. Wunderlich: *Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum*, Elem. Math. **26** (1971), 73–83
- [5] H. Wiener: *H. Wiener's Sammlung mathematischer Modelle*, B.G. Teubner, Leipzig 1905

Zborčený hranol a jeho spojitost s origami

Twisted prism and its connection with origami

Miroslava Tkadlecová

*Ústav matematiky, Lesnická a dřevařská fakulta, MENDELU
Zemědělská 3, 613 00 Brno, Česká republika
miroslava.tkadlecova@mendelu.cz*

Abstract. As part of the Math4U project, I created examples on the topic of twisted prism and origami. These examples are mainly intended for teaching in secondary schools, but even our university students have struggled to solve them. In my paper I will present the examples and show the connection between the two topics.

Keywords: Twisted prism, origami, Miura-ori.

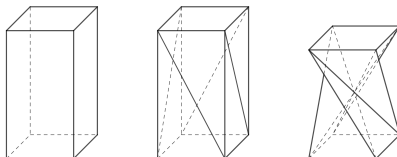
Klíčová slova: Zborčený hranol, origami, Miura-ori.

1 Úvod

Náš tým na MENDELU spolupracoval na tvorbě příkladů pro výuku na středních školách, ve kterých jsou přiblíženy aplikace matematiky a geometrie. Každý příklad má motivační úvod a řešení úlohy na dané téma. Dva z příkladů, které jsem vytvářela, zde budu prezentovat, a to na téma zborčený hranol a origami (z důvodu omezeného prostoru bez řešení).

2 Zborčený hranol

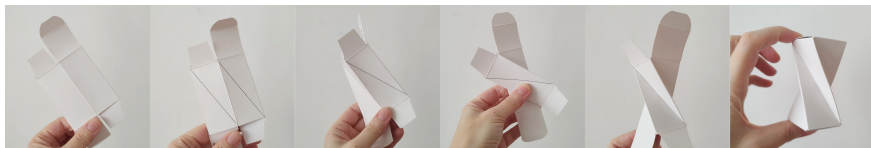
V designu nábytku se objevuje tvar, který je zajímavý i z geometrického hlediska. Lze ho vytvořit z pravidelného čtyřbokého hranolu rozdělením každé boční stěny na dva trojúhelníky pomocí jedné z úhlopříček a po otočení horní podstavy o 90° (Obr. 1). Při zachování délek hran a úhlopříček současně dochází ke změně výšky hranolu. Výsledný tvar je speciálním případem tzv. zborčeného hranolu (v angličtině twisted prism).



Obr. 1: Zborčený hranol vytvořený z kolmého čtyřbokého hranolu při zachování délek hran

Tento tvar je nejjednodušší vytvořit třeba z krabičky od dětského sirupu nebo očních kapek. Můžeme použít následující postup (vizuálně také na Obr. 2).

- Odklopíme víčka krabičky a krabičku složíme do roviny.
- Všechny boční stěny rozdělíme úhlopříčkami v jednom směru.
- Všechny vzniklé úhlopříčky prolomíme mírně směrem dovnitř.
- Provedeme překřížení. Spodní část přidržíme, vrchní část vezmeme, nadzvedneme a přesuneme směrem doleva.
- Jednou rukou přidržíme místo, kde nad sebou leží všechny zvýrazněné úhlopříčky. Současně se snažíme druhou rukou rozložit horní nebo dolní část krabičky do prostoru.
- Pokud se předchozí krok podařil, zbývá už jen zavřít víčka krabičky.



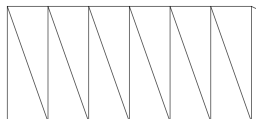
Obr. 2: Postup tvorby čtyřbokého zborceného hranolu z vhodné krabičky

Úloha 1: Chceme vytvořit stoličku ve tvaru zborceného hranolu a máme k dispozici několik vhodných kartonových krabic. Tyto krabice mají stejné čtvercové podstavy o délce hrany 40 cm, ale různé výšky. Máme odzkoušené, že nám vyhovuje výška stoličky 50 cm. Jaká výška krabice (s délkou hrany dolní podstavy 40 cm) je ideální pro výrobu stoličky ve tvaru čtyřbokého zborceného hranolu o výšce 50 cm?

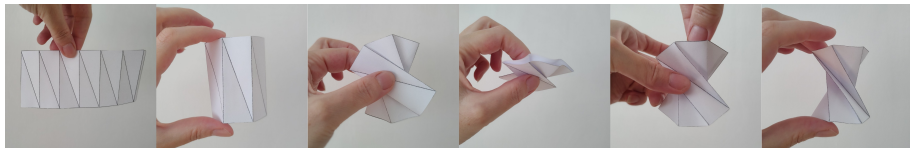
Řešení vyžaduje pouze znalost Pythagorovy věty a trochu prostorové představivosti. Tu lze podpořit právě vytvořením modelu.

Zborcené hranoly mohou vzniknout z kolmých hranolů, jejichž dolní podstava je pravidelný n -úhelník. Postup pro jejich tvorbu z papíru (uvedený výše) je možné aplikovat pouze pro sudá n . Pro lichá n je rozdíl v tom, že po vytvoření sítě pláště není vhodné lepit spoj v boční hraně předtím, než vytvoříme požadovaný tvar.

Pro další úlohu potřebujeme vytvořit zborcený hranol z pravidelného šestibokého hranolu. Protože krabičky tvaru kolmého šestibokého hranolu nejsou obvyklé, vystačíme si pro vytvoření modelu k následujícímu příkladu pouze s pláštěm hranolu z Obr. 3.



Obr. 3: Síť pláště kolmého šestibokého hranolu včetně budoucích hran zborčeného hranolu



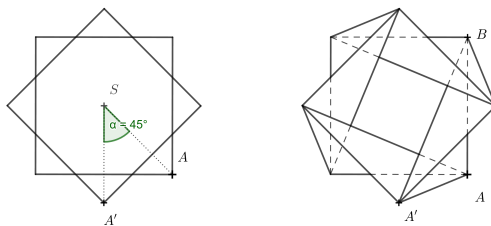
Obr. 4: Postup tvorby šestibokého zborčeného hranolu (pouze bočních stěn)

Postup tvorby modelu šestibokého zborčeného hranolu (Obr. 4) je obdobný tomu u tvorby čtyřbokého zborčeného hranolu z vhodné krabičky.

Úloha 2: Jak závisí výška h šestibokého zborčeného hranolu (který vznikne z pravidelného šestibokého hranolu při zachování délek hran) na výšce původního hranolu v a na délce hrany dolní podstavu a ?

Úloha 3: Jaká je omezující podmínka pro vznik modelů z předchozích dvou úloh?

Úloha 4: Sestrojte síť vázy tvaru zborčeného hranolu, jestliže je dána výška vázy $h = 110$ mm, hrana čtvercové podstavu $a = 65$ mm a úhel rotace horní hrany vázy oproti dolní podstavě je $\alpha = 45^\circ$.



Obr. 5: Vlevo je pohled shora na dolní podstavu a na horní podstavu pootočenou o 45° . Napravo jsou znázorněny i všechny hrany vzniklého objektu.

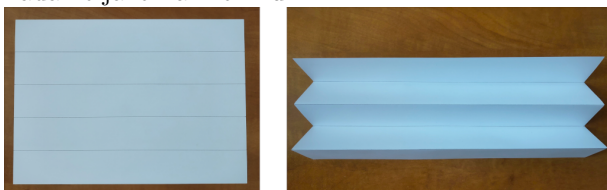
3 Origami

Origami nachází uplatnění ve vesmírném programu, robotice, stavebnictví či designu. Vznikají nové druhy materiálů používající origami struktury. Vzory těchto origami jsou často založeny na pravidelném dělení plochy. Na ně se zaměříme v následujících úlohách.

3.1 Miura-ori

Jedním z nejznámějších origami vzorů je Miura-ori (také známý jako Miura fold). Tuto techniku skládání vynalezl japonský astrofyzik Koryo Miura.

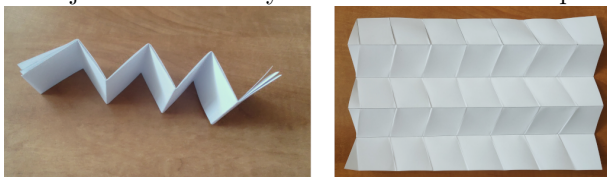
Tento vzor je jednoduché vytvořit. Začneme s obvyklým formátem A4. Pro plynulé rozevírání a zavírání vzoru je vhodné rozdělit strany na lichý počet dílků. Řekněme tedy že kratší strany rozdělíme na 5 stejně velkých dílů a poskládáme jako harmoniku.



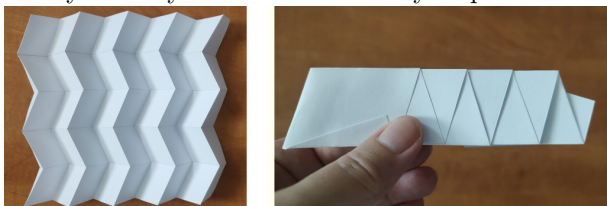
Jednu z delších hran nyní rozdělíme na 7 dílků. Jedním z bodů dělení provedeme úsečku, která svírá jiný než pravý úhel s delší hranou. Ostatními body dělení vedeme rovnoběžky s touto úsečkou.



V těchto vzájemně rovnoběžných úsečkách harmoniku přehneme.



Harmoniku rozložíme a přeskládáme tak, aby se z jednotlivých lomených čar staly hřebeny a údolí a to střídavým způsobem.

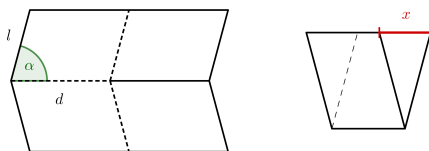


Úloha 1: Na Obr. 6 jsou dvě varianty toho, jak může výsledný vzor ve složeném tvaru dopadnout (při stejném výchozím formátu papíru a stejném počtu dílků dělení). Na jakých parametrech závisí výsledná délka?



Obr. 6: Dvě varianty vzoru Miura-ori.

Úloha 2: Jak závisí délka x (Obr. 7 napravo) základního vzoru Miura-ori ve složeném stavu na velikosti úhlu α a délce d (Obr. 7 nalevo).

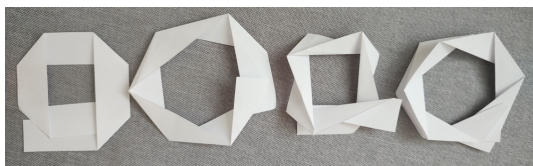


Obr. 7: Základní část vzoru Mirura-ori v rozloženém a složeném tvaru

3.2 Skládání kolem dokola

Zkuste provést sklady na proužku papíru tak, aby se dal složit do roviny a současně abyste se po několika krocích s kratšími konci proužku papíru dostali k sobě (zatím stačí přibližně). Současně nesmí dojít k překřížení delších okrajů proužku (dolní okraj musí zůstat dole, horní musí zůstat po celou dobu nahoře). Několik možných řešení je na Obr. 8.

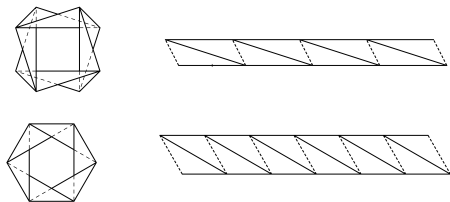
Úloha 3: Pro předchozí typy řešení určete přesný vzor skladů proužku papíru, tak aby se sklady pravidelně opakovaly a aby se oba konce proužku papíru potkaly přesně a šly slepit.



Obr. 8: Ukázky možných řešení

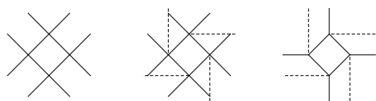
3.3 Souvislost zborčených hranolů a origami

Souvislosti předchozích dvou témat jsou dvě. Zaprvé jde o předchozí úlohu, konkrétně o poslední dva proužky, jejichž řešení je na Obr. 9. Ve složené podobě se vlastně jedná o zborčené hranoly (přesněji jejich pláště) nulové výšky. Pověšimně si, že jeden z proužků má půdorys obdobný jako váza z Obr. 5.



Obr. 9: Část řešení předchozí úlohy

Druhou souvislostí je to, že existují rovinné origami (vzniklé pouze skládáním, bez stříhání a lepení), jejichž části jsou zborčené hranoly o nulové výšce. To, jak se dá vytvořit zborčený hranol z úvodní úlohy o nulové výšce, ilustruje Obr. 10.



Obr. 10: Vznik vzoru pro složení zborčeného hranolu s nulovou výškou

4 Závěr

Příklady by měly motivovat studenty k hledání geometrických závislostí. Ke každé úloze lze vytvořit model, osahat si ho a prozkoumat. Studenti mohou nacházet i překvapivé souvislosti, tak jak tomu je u těchto příkladů.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu Math4U 3: Math Exercises for You 3 (2022-1-CZ01-KA220-SCH-000086821).

Literatura

- [1] Free Documentary - Engineering: *Youtube [online]*, From Paper to Bionics: Origami's Incredible Impact on Science. dostupné z "www.youtube.com/watch?v=uFyJyk1100k&t=1998s", 13.8.2023

Od dynamické geometrie k 3D tisku

From dynamic geometry to 3D printing

Světлана Tomiczková

KMA, FAV ZČU v Plzni

svetlana@kma.zcu.cz

Abstract. Roofs play an important role in construction and designing a roof solution is a complex process that requires detailed analysis and planning. In Descriptive Geometry, we show students the geometric principles that underpin this process. This article presents teaching materials that have been developed to help students master this difficult but rewarding subject. Furthermore, the possibility of creating a realistic model from already created tutorials created in GeoGebra software is shown.

Keywords: Dynamic geometry, 3D printing, roof design, STEM.

Klíčová slova: Dynamická geometrie, 3D tisk, navrhování střech, STEM.

1 Úvod

Výuka deskriptivní geometrie na středních školách se zabývá zejména metodami zobrazování prostoru (3D) do roviny (2D). Hlavní důraz je na rovnoběžné promítání a jeho speciální případ pravoúhlé promítání na jednu nebo dvě průmětny. Na středních odborných školách (stavebních, strojních, elektrotechnických) obsahuje často tento předmět nějaké propojení s odbornou náplní daného oboru. Na průmyslové škole stavební je jedním z témat deskriptivní geometrie "řešení střech".

Střechy hrají důležitou roli ve stavitelství a návrh řešení střechy je složitý proces, který vyžaduje podrobnou analýzu a plánování. Využívá moderní technologie jako CAD (Computer Aided Design) a opírá se o znalosti ze stavebnictví, architektury, hydrologie a dalších relevantních oborů. Díky geometrickému řešení střech mohou stavební projekty efektivně splňovat požadavky na funkčnost, bezpečnost a estetiku [5].

V předmětu deskriptivní geometrie chceme ukázat žákům geometrické principy, na kterých tento proces stojí. Cílem geometrického řešení střech v předmětu deskriptivní geometrie je proto pomoci studentům představit si celý proces navrhování pomocí geometrických metod a konceptů a software dynamické geometrie představuje silný nástroj pro zefektivnění a zefektivnění procesu výuky a učení [1]. Zároveň toto propojení přibližuje žákům jinak dost teoretický předmět.

Během pandemie Covid 19 bylo nutné vysvětlovat učivo žákům "na dálku", což je v předmětu deskriptivní geometrie dost složitý proces [2]. Vznikla proto pro každé téma sada řešených úloh v softwaru Geogebra. Software Geogebra byl vybrán, protože splňoval následující požadavky na vhodný výukový program [3], [4]:

- je uživatelsky příjemný (není složité naučit se ho ovládat),
- je dynamický (objekty jsou svázány a při změně parametrů se mění i objekt),
- lze v něm krokovat jednotlivé části úlohy,
- lze kombinovat 2D a 3D okno, to znamená můžeme se na objekt dívat ve zvoleném promítání (zde kótovaném) a zároveň ho vidíme v prostoru),
- jeho používání je bezplatné.

2 Řešené úlohy

V následujícím textu jsou ukázány některé řešené úlohy týkající se navrhování střech z geometrického hlediska. Vždy je dán půdorys (jeho tvar, popř. rozměry) a další parametry a omezení, které má střecha splňovat. Úlohy jsou řazeny od nejjednodušších po složitější. Všechny řešené úlohy jsou volně dostupné na serveru GeoGebry <https://www.geogebra.org>.

Úlohy mají většinou následující strukturu: pracovní plocha je rozdělena do tří částí - oken. V prvním okně je dán půdorys zastřešené plochy a postupně zde krokováním vzniká půdorys střechy. Krokování se provádí tlačítky ve spodní části prvního okna. Ve druhém okně je popsán postup vytváření střechy. Třetí okno je věnováno vizualizaci ve 3D.

2.1 Úvodní úlohy

Prvním úkolem je zastřešit obdélníkový půdorys a lze nastavit různý spád jednotlivých střešních rovin. Řešení úlohy v GeoGebře lze nalézt na <https://www.geogebra.org/m/kscsfdivr>

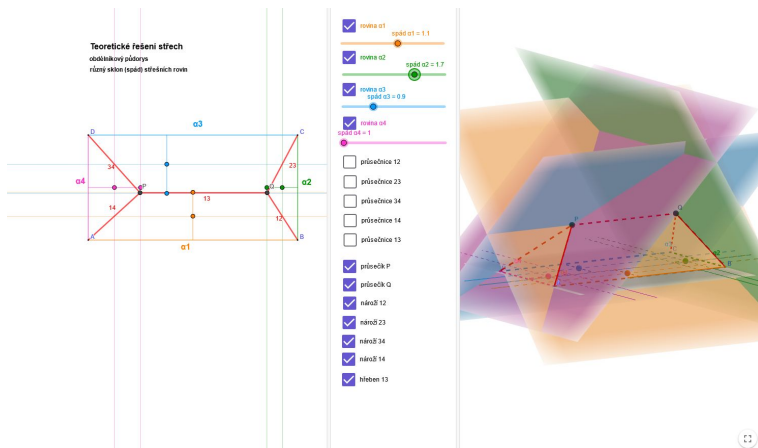
Pomocí tlačítek lze zobrazit nebo skrýt některé prvky konstrukce (obr. 1 a obr. 2). Je zde vidět, že v případě stejného spádu střešních rovin, průsečnice střešních rovin pŕlÍ úhel stop (okrajŕ - okapových hran) střechy.

Další úlohou je zastřešit půdorys ve tvaru L a spád střešních rovin je volitelný, ale je stejný pro všechny střešní roviny (obr. 3). Řešení úlohy v GeoGebře lze nalézt na <https://www.geogebra.org/m/kscsfdivr>.

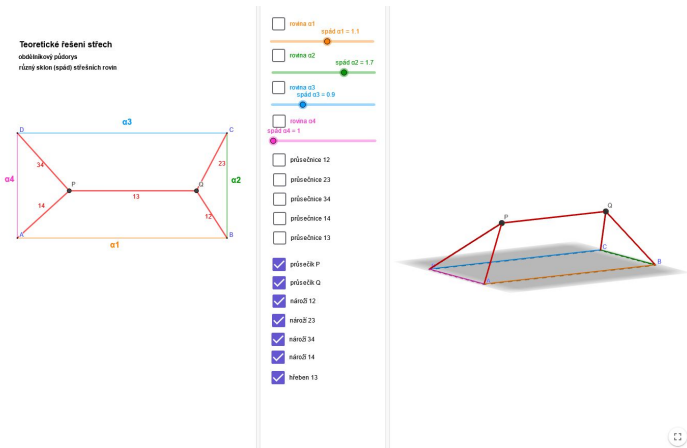
2.2 Další úlohy

V dalších úlohách řešíme střechy různých tvarŕ (<https://www.geogebra.org/m/d2prwafe>) a přidáváme další prvky jako například vikýř (<https://www.geogebra.org/m/rd7w23td>).

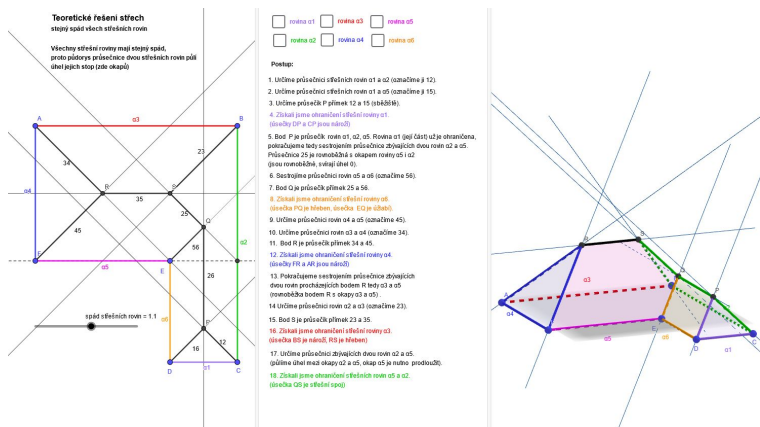
Nejkomplikovanější a nejnáročnější pro pochopení jsou střechy s tzv. "zakázanými okapy". V půdorysu jsou vyznačeny části, kam nesmí, z nějakého důvodu, voda odtékat (například je připojena další stavba). Značí se dvojitou čarou a je nutné střechu doplnit vikýřem nebo ji navrhnout tak, aby voda odtékala jinam. Přidávají se další pomocné roviny a půdorys je pro představu o tvaru takové střechy naprosto nedostatečný. Řešené



Obr. 1: Zastřešení obdélníkového půdorysu - řešení



Obr. 2: Zastřešení obdélníkového půdorysu - řešení se skrytými střešními rovinami



Obr. 3: Střecha ve tvaru L

úlohy v GeoGebre částečně pomáhají problém s vizualizací vyřešit pomocí 3D okna, kde je možné objektem otáčet. Navíc jsou do úloh zakomponována i nevhodná řešení a je možné mezi vhodným a nevhodným řešením přepínat.

Řešení střechy se zakázaným (zastavěným) rohem (viz obr. 4) lze nalézt na <https://www.geogebra.org/m/qt3qjgwp>.

Řešení střechy se zakázaným (zastavěným) koutem (viz obr. 5) lze nalézt na <https://www.geogebra.org/m/dqby8xuy>.

3 Možnost 3D tisku z již vytvořeného modelu

Přes výhody výukových materiálů v GeoGebre jako jsou krokování, 3D vizualizace a dynamické změny, je v komplikovanějších případech vhodné doplnit digitální modely a materiály modelem fyzickým. Pro výrobu modelů je možné a vhodné použít 3D tisk. Existuje řada programů, ve kterých je možné tyto modely vytvářet, ale je také možné využít již vytvořených modelů v GeoGebre.

Pokud máme vytvořený model, který může být i součástí již vytvořeného výukového materiálu, stačí drobné úpravy a několik kroků k exportu modelu do formátu STL (stereolitografie). Následující postup je vhodný při použití verze GeoGebra Classic 5. Při použití vyšší verze není nutné nahrát applet na GeoGebra.org.

1. Použijeme výsledný model například střechy se zakázaným rohem. Nezáleží na tom, na kolik oken je rozdělena pracovní plocha, model se vytváří z 3D okna.
2. Modelu střechy přidáme podstavu a skryjeme objekty, které v mo-

Teoretické řešení střeš - zastavěný roh
 spád všech střešních rovin je 2:1 (45 stupňů)
 V příběhu konstrukce je možná pomoci řádků
 zaplnit a vyznačit vektorem střešních rovin

Postup:

1. Očíslováme okapy (stopy střešních rovin).
2. Vykreslíme střeš nad obdélníkem ABCD
3. Přidáme pomocné rovny 5 a 6 (zaplníme body zakázané oblastí a (v průběhu kótmu k zastavěnému))
4. Vykreslíme odstavěd rovně vsměrem opačným

A) průsečnice rovin 1 a 5
 B) průsečnice rovin 4 a 6
 C) průsečnice rovin 5 a 6
 D) R průsečík 14 a 15
 E) S průsečík 16 a 45
 F) hlebed RRS (průsečnice rovin 5 a 4)
 G) vzhledem nároč, úžabí a hřebeny

Zkontrolujeme střešní rovny a jejich spád, jestli rovnají 2:1.

Pomocní řádky je možná skryt pomocně průsečnic a stopy rovin 5 a 6.

rovna 01

rovna 02

rovna 03

rovna 04

rovna 05

rovna 06

stopy rovin 5 a 6

pomocné průsečnice

Obr. 4: Střeš se zakázaným rohem

Teoretické řešení střeš - zastavěný kout

Postup:

1. Očíslováme střešní rovny
2. Vsměrem okapů obrátíme a vsměrem okapy
3. Přidáme pomocné rovny 5 (stopy těchto rovin jsou kolmé na zastavěném) a řádky

A) průsečnice 12, 16 a sčábně P (průsečík 12 a 16)
 B) průsečnice 26 (průsečík P)
 C) průsečnice 66 a sčábně R (průsečík 66 a 26)
 D) průsečnice 28 (bodem Q)
 E) průsečnice 22 a sčábně R (průsečík 22 a 28)
 F) průsečnice 38 (bodem R)
 G) průsečnice 37 a sčábně S (průsečík 38 a 37)
 H) průsečnice 34, 41 a sčábně S (průsečík 34 a 41)
 I) průsečnice 35 (bodem Q)
 J) průsečnice 57 a sčábně T (průsečík 35 a 37)
 K) průsečík se stopou 7
 L) průsečnice 31 (opozice ST)

vyznačíme ohraničené střešní plochy

průsečnice 78

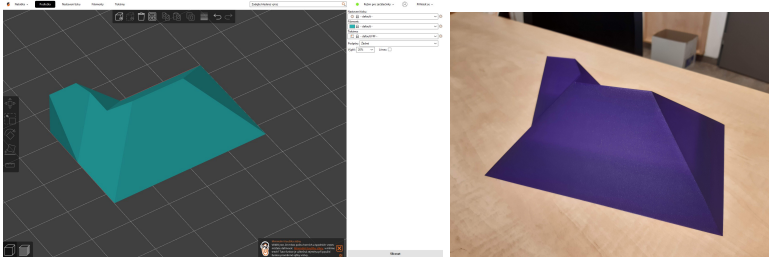
izometrie řešení 3D - křivkové střeš

pomocné příčky - křivkové střeš

3. Přidáme pomocné rovny 5 (rovny 5 tvoří stopy rovnoobřnou s T a spád orientovaní na opačnou stranu
- A) průsečnice 78 a sčábně S (průsečík 78 a 78)
- B) rovnoobřná se stopou rovny 7
- C) průsečnice 89 a sčábně S (průsečík 89 a 78)
- D) průsečnice 79 (bodem Q)
- E) vzhledem nároč 79 ačkábi 69

vyznačíme ohraničené střešní plochy 7,8,9

Obr. 5: Střeš se zakázaným koutem



Obr. 6: Střecha v programu PrusaSlicer a výsledný fyzický model

delu mít nechceme (například některé z výraznějších body, které vypadají jako kuličky)

3. Nahrajeme applet na geogebra.org.
4. V horní části appletu rozklikneme menu a vybereme *Open in App*.
5. V pravém horním rohu rozklikneme menu a vybereme *Download as* a z nabízených možností vybereme *3D print (.stl)*.
6. Otevře se nabídka parametrů (rozměry, měřítko apod), které se ale dají později ještě upravovat v programu pro tiskárnu. Vhodné je ale zaškrtnout možnost *Filled Solid*, která zajistí výplň střechy mřížkou, aby byl 3D tisk dostatečně pevný a střecha se během tisku nebo po něm nebortila.
7. Výsledný model je možné si prohlédnout např. v programu Rhinoceros nebo ve volně stažitelném programu určeném pro 3D tiskárnu *PrusaSlicer*.
8. Oba modely (střecha v programu PrusaSlicer) i výsledný fyzický model vytištěný na 3D tiskem jsou na obrázku 6.

4 Závěr

Zařazení kapitoly Řešení (navrhování) střech do předmětu Deskriptivní geometrie pro střední průmyslové školy stavební je vhodnou aplikací v té době již probraných teoretických částí věnujícím se zobrazovacím metodám. Žáci vidí aplikace, které souvisí s jejich oborem studia. Navíc zařazení takových témat podporuje koncepci STEM (Science, technology, engineering, mathematics). V tomto článku byly představeny výukové materiály vytvořené v GeoGebře a používané žáky na průmyslové škole stavební. V GeoGebře je možné vygenerovat z vytvořených materiálů podklady pro 3D tisk. Tyto modely jsou vhodným doplňkem již vytvořených materiálů.

Literatura

- [1] Božić, R., Takači, Đ., Stankov, G.: *Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters*, Interactive Learning Environments, 29(4), 655–669, 2019. <https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1602842>
- [2] Mencáková, K., Šafařík, J.: *Výuka deskriptivní geometrie na FAST VUT v době „koronavirové“*, Proceedings of the Czech-Slovak conference on geometry and graphics 2020. First. Bratislava: SCHK, Slovak Chemistry Library, Faculty of Chemical and Food Technology STU. 131-138, 2020.
- [3] Radović, S., Radojičić, M., Veljković, K., Marić, M.: *Examining the effects of Geogebra applets on mathematics learning using interactive mathematics textbook*, Interactive Learning Environments, 28(1), 32–49, 2018. <https://doi.org/10.1080/10494820.2018.1512001>
- [4] Yohannes, A., Chen, H. L.: *GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020*, Interactive Learning Environments, 31(9), 5682–5697, 2021. <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861>
- [5] Koźniewski, E. Banaszak, K.: *Roof Geometry in Building Design*, Open Engineering. 10, 839-845, 2020. <https://doi.org/10.1515/eng-2020-0094>.

Variants of the map equations of the conic projection from different aspects of use

Margita Vajsáblová

*Faculty of Civil Engineering STU in Bratislava
Radlinského 11, Bratislava, Slovak Republic
email: margita.vajsablova@stuba.sk*

Abstract. The aim of the contribution is to show various aspects of the use of the conic projection from the center lying on the axis of the conical surface of revolution, the derivation of its map equations and the image of a point in the development of the conical surface. The equations for the image of a point in the Cartesian coordinate system in 3D space enable their application for any shapes (straight line, circle, etc.) given parametrically. Analytical relations and properties of the conic projection will also be presented in a specific form for geographic coordinates of a point on a spherical reference surface of the Earth and for an image of a geographic network, but also a geodetic line on a reference sphere.

Key words: conic projection, conic panorama, map equations, cartographic projection, reference sphere

1 Map equations of conic projection from different points of view

Conic projections are used in two main areas, namely as conic perspective (conic panorama) and as conic cartographic projection. Depending on the given application, it is necessary to formulate the map equations differently.

In the conic panorama we need map equations for 3D Cartesian coordinates (x, y, z) , where we obtain the following type of coordinates:

- a) Cartesian coordinates 3D of the image of the point in a conical surface,
- b) polar coordinates of the development of the image of the point in a plane,
- c) Cartesian coordinates 2D of the image of the point in a plane.

In the conic cartographic projection, we need map equations for spherical coordinates (U, V) , where we obtain the following type of coordinates:

- a) polar coordinates of the development of the image of the point in a plane,
- b) Cartesian coordinates 2D of the image of the point in a plane.

2 Conic perspective (conic panorama)

The principle of conical perspective is known in geometry, we project a point onto a conical surface, which we develop into a plane.

Let Ψ is conical surface of revolution with axis \boldsymbol{o} , vertex \mathbf{V} and let projection center \mathbf{S} lies on the axis \boldsymbol{o} . Then the conic perspective of point $\mathbf{A} \in {}_{\infty}\mathbf{E}_3 - \mathbf{G}$ is the intersection of the half-line $\overset{\rightarrow}{\mathbf{SA}}$ with the conical surface Ψ (if there are two points,

we consider the one closer to the center S), then: $A_s = \vec{SA} \cap \Psi$. G is a conical space bounded by a conical surface with vertex S that is coaxial to Ψ and with the same vertex angle.

The principle of conical perspective with the development of a conical surface is shown in Fig. 1, where ω is the angle of the lines of conical surface Ψ with its axis, the horizon h is a parallel circle of the conical surface Ψ in the plane of the projection center S and r – the radius of the horizon h [4].

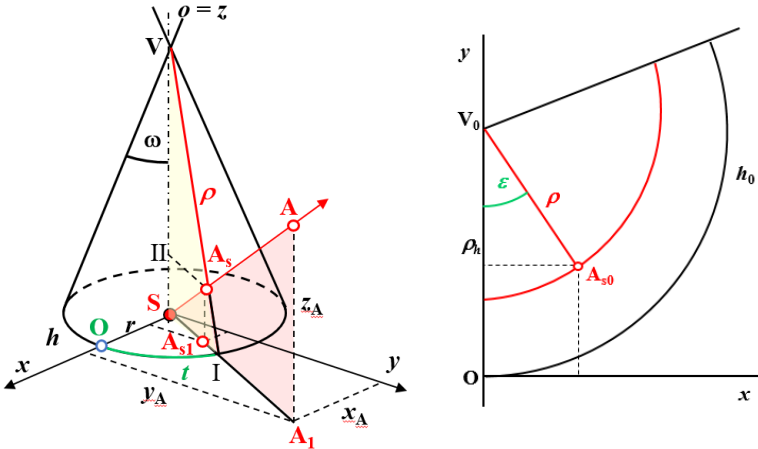


Fig. 1: The principle of conic perspective with the development of a conical surface

2.1 Map equations for Cartesian coordinates 3D of the image of the point in a conical surface

The map equations for Cartesian coordinates 3D of the image of the point in a conical surface have been derived analytically as the intersection of the conical surface Ψ and the straight line SA (Fig.1 left). Let's have a Cartesian coordinate system $\{S, x, y, z\}$, conical surface Ψ with the axis $z = o$ and with the angle ω , this is angle of the lines of conical surface with the axis o . In conic perspective with projection center S on the conical surface Ψ , radius of horizon is r , the image of the point $A[x_A, y_A, z_A]$ is $A_s[x_{As}, y_{As}, z_{As}]$ and it holds [5]:

$$\begin{aligned} x_{As} &= \frac{r x_A^2}{x_A z_A \operatorname{tg} \omega + x_A \sqrt{x_A^2 + y_A^2}}, \\ y_{As} &= \frac{r x_A y_A}{x_A z_A \operatorname{tg} \omega + x_A \sqrt{x_A^2 + y_A^2}}, \\ z_{As} &= \frac{r x_A z_A}{x_A z_A \operatorname{tg} \omega + x_A \sqrt{x_A^2 + y_A^2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Map equations for polar coordinates of the development of the image of the point

The development of the conical surface Ψ , for which angle of its generating lines with the axis \mathbf{o} is ω , is the angle: $\alpha = 360^\circ \sin \omega$. Generating lines of the conical surface Ψ will develop into a bundle of straight lines centered at the vertex \mathbf{V}_0 . If t is the angle of the axial plane of given generating line with the axial plane of generating line passing through the point \mathbf{O} , then their angle in development is ε , for which it holds: $\varepsilon = t \sin \omega$. Parallel circles of the conical surface Ψ are developed into the arcs of concentric circles, the center of which is \mathbf{V}_0 and their radius ρ is equal to the distance of the points of the parallel circle from the vertex \mathbf{V} .

Let's have a Cartesian coordinate system $\{\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ in a plane, where the origin \mathbf{O} is an intersection of the horizon \mathbf{h} with axis \mathbf{x} , polar coordinate system is $\{\mathbf{V}_0, \rho, \varepsilon\}$, where $\mathbf{V}_0 \in \mathbf{y}'$, $|\mathbf{OV}_0| = \rho_h$ and it holds (Fig. 1).

$$\rho_h = \frac{r}{\sin \omega}, \tag{2}$$

where ω is the angle of generating lines of conical surface with its axis and r is the radius of horizon \mathbf{h} .

We derived the map equations of the conic perspective from the similarity of two pairs of triangles, namely: ΔSAA_1 and ΔSA_sA_{s1} , also ΔSIV and $\Delta IIIA_sV$ (Fig. 1). Polar radius ρ of the point A_{s0} we derived from its Cartesian coordinates x_A, y_A, z_A and the angle ω , we obtain:

$$\rho = \frac{r x_A \sqrt{x_A^2 + y_A^2}}{(x_A z_A \operatorname{tg} \omega + x_A \sqrt{x_A^2 + y_A^2}) \sin \omega}. \tag{3}$$

If t is the angle of the axial planes by point \mathbf{O} and point A_s , then the polar angle ε of a point A_{s0} is:

$$\varepsilon = t \sin \omega, \tag{4}$$

where t is:

$$t = \operatorname{Arcsin} \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}. \tag{5}$$

2.3 Map equations for Cartesian coordinates 2D of the image of the point in a plane

Transformation of this polar coordinates ρ, ε , where the origin \mathbf{V} of polar coordinate system is in axis \mathbf{y} , to the Cartesian coordinates \mathbf{x}, \mathbf{y} has the equations (Fig. 1):

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varepsilon, \\ y &= \rho_h - \rho \cos \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

If polar coordinate system in the plane has the same origin as Cartesian coordinate system ($\mathbf{V} = \mathbf{O}$) and axis x is vertical (Fig. 5), therefore transformation of this polar coordinates to the Cartesian coordinates x, y is in the form:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varepsilon, \\ y &= \rho \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

In Fig. 2 is the illustration of conic panorama of the object created in the Mathematica software [7], where we applied the derived map equations (2) – (6) of the conic panorama for the object given by Cartesian coordinates and instead of x_A, y_A, z_A we substituted parametric relations of the parts of the given object (its edges). Similarly, the conical panorama of the cylinder is illustrated in Fig 3.

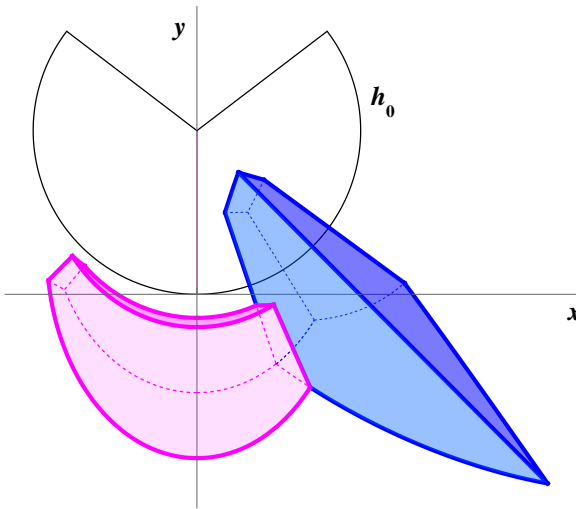


Fig. 2: Conic panorama of the object created in the Mathematica software

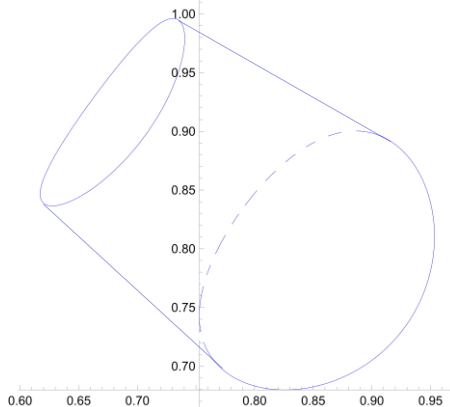


Fig. 3: Conic panorama of the cylinder created in the Mathematica software

2.4 Map equations of the image of the straight line in a conic perspective

If we also consider the parts of the line that are in the definition space ${}_{\infty}\mathbf{E}_3 - \mathbf{G}$, then for the conic perspective of the line \mathbf{p} ($\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$) it holds:

- a) If $\mathbf{S} \in \mathbf{p}$, then its image consists of two points $\mathbf{P}_s, \mathbf{P}'_s$, namely the intersections of the straight line \mathbf{p} with the conical surface Ψ .
- b) If $\mathbf{p} \parallel \mathbf{o}$, then its image is \mathbf{p}_s , the part generating the straight line of the conical surface Ψ .
- c) If \mathbf{p} is intersecting with \mathbf{o} , its image consists of two half-line ${}^1\mathbf{p}_s$ and ${}^2\mathbf{p}_s$ (or line segments) lying on the generating lines of the conical surface Ψ .
- d) If conditions a) – c) do not apply, image of a line \mathbf{p} is a part of regular conic section (ellipse, parabola, hyperbola).

In the article [5], map equations are derived for the image of straight lines whose vanishing points are the intersections of the horizon \mathbf{h} with the \mathbf{x} -axis. Theirs projection planes intersect the horizon plane \mathbf{h} in its diameter with the end point \mathbf{O} and its angle with the horizon plane is φ . The image of such a straight line in a conic perspective is a part of conic section, and in the unfolding of the conical surface it is a curve with parameter t and with an expression in the polar coordinate system:

$$\rho = \sqrt{\left[r \cos t \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t} \right) \right]^2 + \left[r \sin t \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t} \right) \right]^2} + \left(\frac{r}{\operatorname{tg} \omega} - r \operatorname{tg} \varphi \sin t \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi \sin t} \right) \right),$$

$$\varepsilon = t \sin \omega.$$

(8)

3 Map equations of conic perspective in cartography

Conical cartographic projection is one of the most commonly used, for territories lying along a parallel circle. In the conic cartographic projection, we need map equations for spherical geographic coordinates (U, V) , where spherical latitude U is from -90° to 90° and spherical longitude V is from -180° to 180° [1]. In conic projection, parallels are projected in the arcs of concentric circles with the center at the vertex of the cone, their radius ρ is a function of latitude U . Meridians are projected in a bundle of straight lines that with the center in a vertex of the conical surface Ψ and make an angle ε with the image of the basic meridian, for which the 2nd map equation is: $\varepsilon = nV$, where n is the constant of conic projection.

3.1 Conic perspective projection with a fixed center

Conic perspective projection with a fixed center is a cartographic projection, the principle of which consists in the conic perspective projection of a reference surface of the Earth onto a concentric conic surface Ψ (tangential in the base parallel U_0 or secant in parallels with U_1 and U_2) from the center \mathbf{S} , which lies on

Image of part of the reference sphere in a conic perspective projection with a fixed center S ($c = |SO| = 2R$) onto a tangential conical surface with $U_0 = 45^\circ$ is in Fig. 5. Map equations (10) and (7) were used to create this image in the Mathematica software.

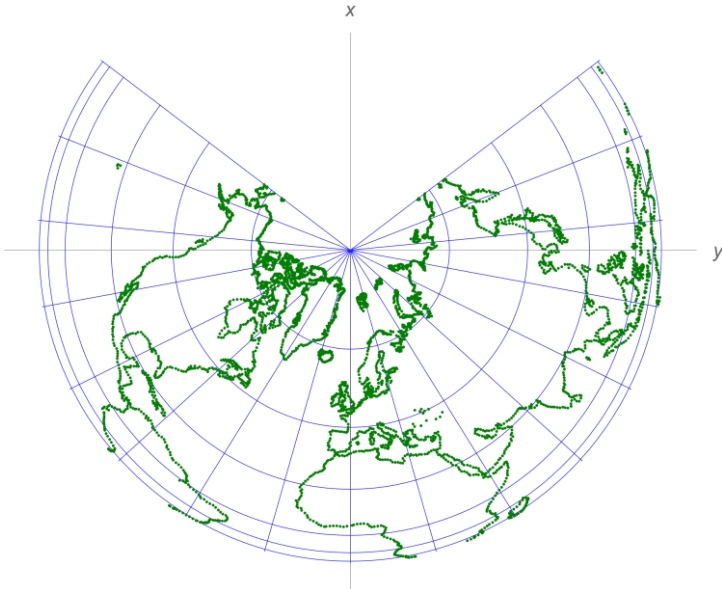


Fig. 5: Conic perspective projection with a fixed center S with $c = |SO| = 2R$ and $U_0 = 45^\circ$.

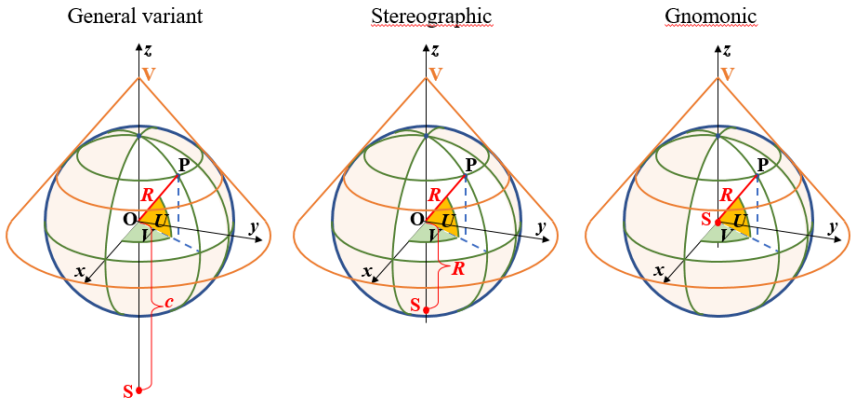


Fig. 6: Three variants of the conic perspective projections with a fixed center S

We know three variants of conic perspective projection with a fixed center (on the Earth's axis) (Fig. 6):

1. Conic projection with a fixed center (general variant): $|\mathbf{SO}| = c \neq R$, $|\mathbf{SO}| = c \neq 0$.
2. Stereographic conic projection with a fixed center: $|\mathbf{SO}| = c = R$.
3. Gnomonic conic projection: $\mathbf{S} = \mathbf{O}$ ($c = 0$).

3.2 Stereographic conic projection with a fixed center \mathbf{S}

Stereographic conic projection with a fixed center is named Braun's stereographic conic projection (1867). Projection center \mathbf{S} is the South Pole, e.g. $c = R$, conical surface is tangential in parallel with spherical latitude $U_0 = 30^\circ$. Map equations of stereographic conic projection with a fixed center \mathbf{S} [2] is:

$$\rho = \frac{3R \sin \left(\frac{90^\circ - U}{2} \right)}{\sin \left(U_0 + \frac{90^\circ - U}{2} \right)}, \quad (11)$$

$$\varepsilon = V \sin U_0.$$

Image of the reference sphere in a stereographic conic projection with a fixed center onto a tangential conical surface with $U_0 = 45^\circ$ is in Fig. 7. Map equations (11) and (7) were used to create this image in the Mathematica software.

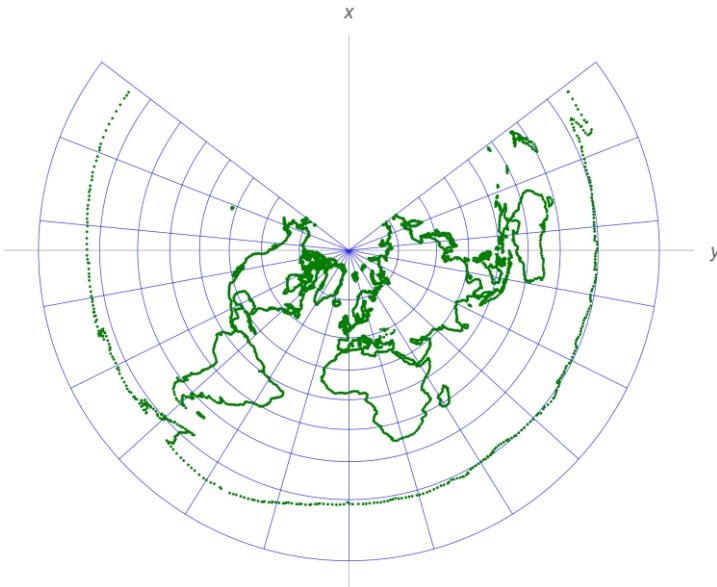


Fig. 7: Stereographic conic projection with a fixed center \mathbf{S}

3.3 Gnomonic conic projection

In gnomonic conic projection, the points of the reference sphere with radius R are projected from the center S of the sphere onto the tangent conical surface in the normal position. A tangent parallel has a spherical latitude U_0 . Map equations of gnomonic conic projection are [3]:

$$\rho = \frac{R \cos U}{\sin(U_0 + (90^\circ - U)) \sin U_0}, \quad (12)$$

$$\varepsilon = V \sin U_0.$$

In the gnomonic conic projection, it is possible to project only a part of the reference sphere in the spherical latitude interval:

from $U = U_0 - 90^\circ$ to 90° , $U_0 > 0$.

Gnomonic conic projection on the secant conical surface in parallels with spherical latitude U_1 and U_2 is named Murdoch's 2nd gnomonic conic projection.

Image of North hemisphere of the reference sphere in a gnomonic conic projection onto a tangential conical surface with $U_0 = 45^\circ$ is in Fig. 8. Map equations (12) and (7) were used to create this image in the Mathematica software.

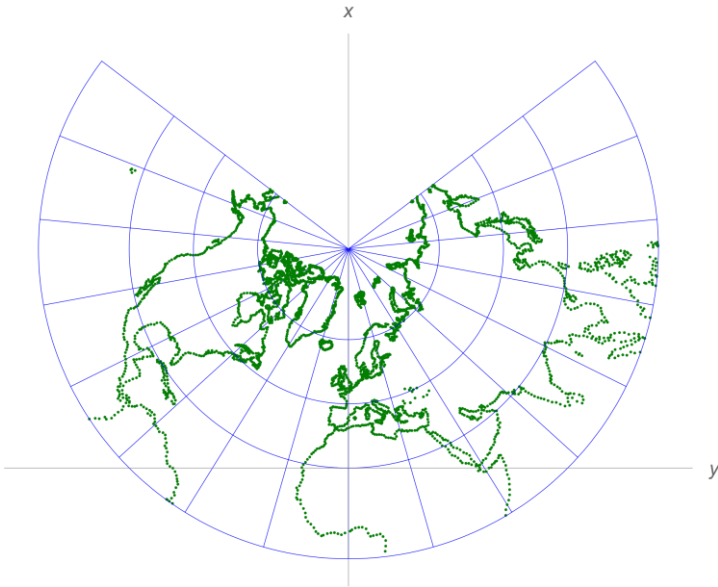


Fig. 8: Gnomonic conic projection

4 Conclusion

Creation of conic panorama with 360° view angle in the software environments e.g. Mathematica, Geogebra have been the main motivation of derivation of map equations of conic projection. We have shown several variants of map equations from the point of view of their use, as well as examples of their application in the Mathematica software.

Digital conic panorama is created also by cameras with conical mirror, where the principle is similar, but not the same [6].

The map equations of various types of conic projections with a fixed center that we introduced and derived in this paper are important in the field of mathematical cartography, which is one of the main topics for students of Geodesy and cartography.

References

- [1] V. Hojovec.a kol.: *Kartografie*. Praha: GKP, 1987.
- [2] M. Vajsáblová: *Matematické základy kartografie*. 1. vyd. Bratislava: Spektrum STU, 2021. 443 s. Edícia vysokoškolských učebníc. ISBN 978-80-227-5114-8.
- [3] M. Vajsáblová: Kuželové projekcie. In *Zborník sympózia o počítačovej geometrii SCG'2007: Roč. 16*. Bratislava: STU v Bratislave, 2007, s.128-135. ISBN 978-80-227-2734-1.
- [4] M. Vajsáblová: *Metódy zobrazovania*. Bratislava: STU v Bratislave, 2011. 198 s. ISBN978-80-227-3574-2. Dostupné na internete: http://www.svf.stuba.sk/docs//dokumenty/skripta/metody_zobrazovania/index.html.
- [5] M. Vajsáblová: Cylindrická a kónická perspektíva. In *VII. Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou. Zborník prednášok: 6. sekcia: Aplikácie geometrie v technickej praxi, TU, Košice, 22.-24.5.2002*, 2002, s.85-90.
- [6] https://www.researchgate.net/publication/277012779_Using_Conical_and_Spherical_Mirrors_with_Conventional_Cameras_for_360_Panorama_Views_in_a_Single_Image?channel=doi&linkId=555e639308ae8c0cab2c660e&showFulltext=true [cit. 2024-06-23]
- [7] WOLFRAM Mathematica 13.0. Copyright 1988-2020 Wolfram Research, Inc.

Vector division in Minkowski point set operations

Daniela Velichová

*Institute of Mathematics and Physics, Mechanical Engineering Faculty, STU
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic
email: daniela.velichova@stuba.sk*

Abstract. Few remarks on the only possible real finite-dimensional division algebras over the reals (without assuming either the commutative or associative laws of multiplication) are mentioned in the paper with some references on the proofs of this fact. Further on, an idea will be presented of a new concept of vector division introduced recently, based on elementary procedures of a certain vector space of finite dimension with defined inner product. Respective inverse operation of a new multiplication of vectors is introduced.

Key words: division algebras, vector division, inverse vectors, Minkowski division of point sets, inverse curves

1 Introduction

The only possible real finite-dimensional division algebra over the reals (without assuming either the commutative or associative laws of multiplication) are the following

1. Real numbers \mathbb{R} – dimension 1
2. Complex numbers \mathbb{C} – dimension 2
3. Quaternions \mathbb{Q} – dimension 4
4. Octonions \mathbb{O} – Cayley numbers – dimension 8.

On the way to prove this fact one can meet many famous names of wellknown mathematicians, who worked on this problem, as will be shown in the next text.

In 1831 Carl Fridrich Gauss wrote: “The writer has reserved for him the question why the relations between things that make up a manifold of more than two dimensions cannot provide quantities admissible in universal arithmetics.” in his *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*, [1]. In 1853 William Rowan Hamilton jumped to quaternions without proving the impossibility of division algebra in 3-space, as introduced in [2]. German mathematician Hermann Hankel proved and published in 1867 in [3], that no hypercomplex number system could satisfy all the laws of algebra. Mathematicians Ferdinand Georg Frobenius from Germany, American scientist Charles Sanders Peirce, Élie Cartan from France, and Franz X. Grisseman from Austria independently proved that only one more division algebra, namely quaternions, is made possible by dropping the commutativity of multiplication, which appeared in their works [4] - [7], published during the period 1878-1900.

In 1908 Élie Cartan stated in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, [8], which he co-authored with German mathematician Eduard Study, the following:

„A definite answer if another one exists can only be given by the whole ulterior development of algebra and analysis.“

British mathematician Arthur Cayley and American Leonard Eugene Dickson constructed octonions \mathbb{O} of dimension 8, which proved to form division algebra over the reals, and sedenions \mathbb{S} forming a 16-dimensional non-commutative and non-associative algebra over the reals.

The octonions can be defined as octets (or 8-tuples) of real numbers. Any octonion is real linear combination of unit octonions $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, where e_0 is the scalar or real element (identified with the real number 1). Multiplication of the unit octonions, (due to Cayley, 1845, and Graves, 1843) is given as

$$e_i e_j = \begin{cases} e_j, & \text{if } i = 0 \\ e_i, & \text{if } j = 0 \\ -\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta (equal to 1 if and only if $i = j$), and ε_{ijk} is a completely anti-symmetric tensor with value 1 when $ijk = 123, 145, 176, 246, 257, 347, 365$.

Sedenions have a multiplicative identity element and inverses, but do not form division algebra as they have zero divisors. Dickson published this generalisations in 1919 in *Annals of Mathematics*, [9].

In 1940 German mathematician Heinz Hopf proved the important theorem: “Every finite-dimensional real commutative division algebra is either 1- or 2-dimensional. “, and even generalised it: “Any finite-dimensional real division algebra must have dimension a power of 2. “.

Then in 1958 American John Willard Milnor, French Michele André Kervaire, Hungarian-American Raoul Bott and also some other mathematicians proved that the only possible division algebras over the reals (without assuming either the commutative or associative laws of multiplication) are of dimension 1 (reals), 2 (complex numbers), 4 (quaternions) and 8 (Cayley numbers). Milnor published this evidence in paper “Some consequences of a theorem of Bott“, in *Annals of Math.*, [10].

Papers on impossibility of a division algebra on vectors in three-dimensional space appeared in 1966, [11], and 1971, [12].

Introduction of a new concept of a division of vectors in a vector space of finite dimension with defined inner product appeared in 2023 in paper published by José E. H. Ramírez from Brazil and E. R. Oria from Cuba, [13]. The main goal in this paper was to use elementary procedures to divide two vectors of a certain vector space, while the result be a matrix, representing special geometric transformation related to the position of the two division factors, divided and divisor vector.

2 Division of vectors

The new concept of vector division is defined by elementary procedures in any vector space of finite dimension with defined inner (scalar) product. Let V be a vector space with defined inner product and $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.

Result of the division of two vectors is matrix E

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \alpha I + \beta R = E,$$

where I is the unit matrix, and R is a perpendicular rotation matrix, while

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \quad \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_\perp}{|\mathbf{b}|^2}$$

for $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} \cdot R$ be a perpendicular rotation of the vector \mathbf{b} .

If V is the vector space \mathbf{R}^2 , then matrix E rotates vector \mathbf{b} and then adjusts its magnitude to the magnitude of vector \mathbf{a} . In the particular case that $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, then E is the usual rotation.

Matrix E defined as division of two vectors determines a linear transformation in the respective vector space. Thus a new concept of Minkowski division of vectors resulting on a vector might be defined as follows:

$$\mathbf{a} \oslash \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot E = \mathbf{c}$$

Minkowski division of two vectors results in vector \mathbf{c} , which is the image of vector \mathbf{a} under the linear transformation determined by matrix

$$E = \alpha I + \beta R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \quad \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_\perp}{|\mathbf{b}|^2}$$

for $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} \cdot R$ be a perpendicular rotation of the vector \mathbf{b} .

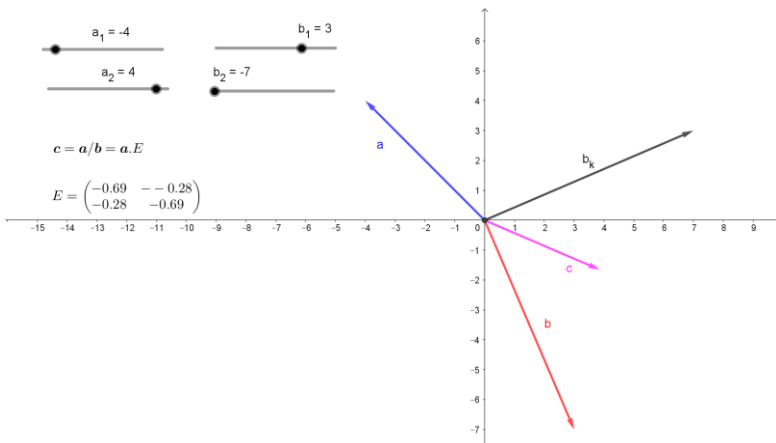


Fig. 1: Minkowski division of 2 vectors in the vector space \mathbf{R}^2

Some properties of Minkowski vector division might be easily proved from the definition of vector division.

1. $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}} = \mathbf{I}$, because $\mathbf{a} \oslash \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a}$
2. $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, because $\mathbf{0} \oslash \mathbf{a} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \perp \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, because $\mathbf{a} \oslash \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\mathbf{b} \oslash \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_{inv} = \mathbf{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

In his context, it is necessary to define also a new concept of vector multiplication as inverse operation through which the inverse vector could be obtained, so that this multiplication be consistent with the above defined division operation between vectors. The resulting product of two vectors in this new multiplication will be again a matrix, a linear combination of matrices \mathbf{I} and \mathbf{R} .

Let V be a vector space with defined inner product and $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. The product of vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} denoted as $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ is defined as matrix \mathbf{E}_{inv}

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \alpha_{inv} \mathbf{I} + \beta_{inv} \mathbf{R} = \mathbf{E}_{inv}$$

where \mathbf{I} is the unit matrix, and \mathbf{R} is a perpendicular rotation matrix, while

$$\alpha_{inv} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \beta_{inv} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\perp}$$

for $\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}$ be a perpendicular rotation of the vector \mathbf{b} .

$$\mathbf{E}_{inv} = \begin{pmatrix} \alpha_{inv} & \beta_{inv} \\ -\beta_{inv} & \alpha_{inv} \end{pmatrix}$$

Let $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ be a vector in the vector space V . The inverse vector of \mathbf{a} , denoted as \mathbf{a}^{-1} , is such vector, for which $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{I}$. Then, from definition of vector multiplication follows that $\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$, therefore vectors \mathbf{a} and \mathbf{a}^{-1} are collinear.

3 Minkowski point set division

Division of 2 point sets A and B , Minkowski point set division $A \oslash B$, is defined as an image of set A under the transformation represented by matrix \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{I} + \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{R},$$

where \mathbf{a}, \mathbf{b} are position vectors of points $a \in A, b \in B$ with respect to fixed reference point and

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \quad \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\perp}}{|\mathbf{b}|^2}$$

while $\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}$ is a vector perpendicular to vector \mathbf{b} (vector \mathbf{b} revolved by 90°)

$$A \oslash B = \mathbf{E}(A) = \{a \cdot \mathbf{E}, \forall (a \in A, b \in B)\}.$$

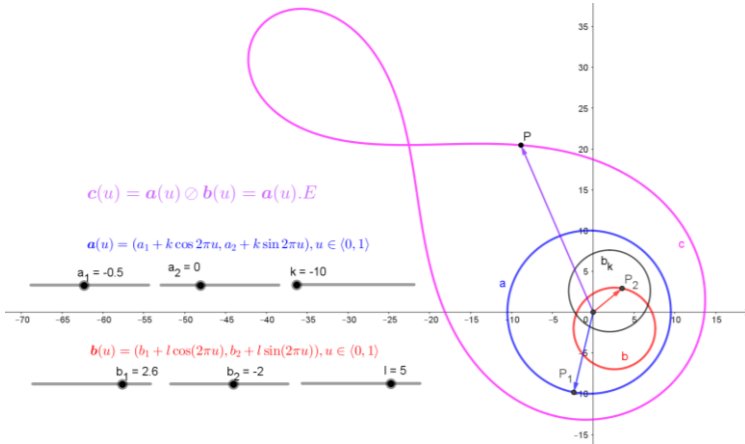


Fig. 2: Minkowski division of two circles

Dividing two coinciding circles \mathbf{a} and $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, the following holds:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}} = I \Rightarrow \mathbf{a} \oslash \mathbf{b} = I(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

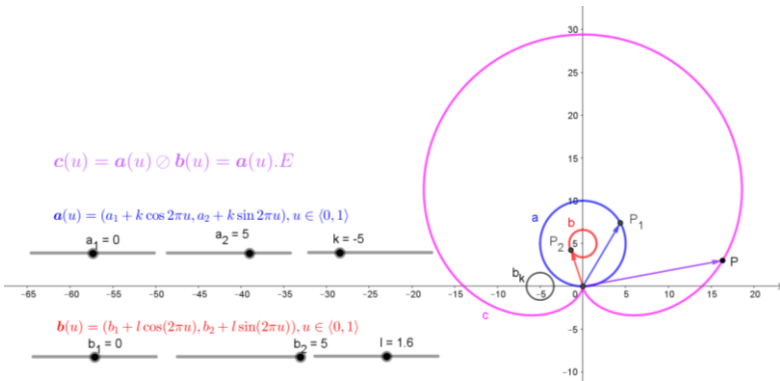


Fig. 3: Minkowski division of two circles in special position

Using the same procedure as for inverse vector, the inverse point set could be defined. Let a curve be determined by its parametric vector representation, then its inverse curve will be determined as follows

$$\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u)), u \in I \subset \mathbb{R}$$

$$|\mathbf{r}(u)|^2 = x^2(u) + y^2(u)$$

$$\mathbf{r}^{-1}(u) = \frac{1}{x^2(u) + y^2(u)}(x(u), y(u)), u \in I \subset \mathbb{R}$$

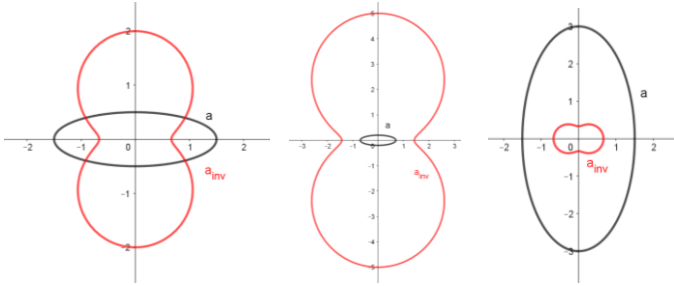


Fig. 4: Inverse curve to ellipse

$$\mathbf{a}(t) = (kt\cos(2\pi t), kt\sin(2\pi t)), \mathbf{a}^{-1}(t) = \frac{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))}{kt}$$

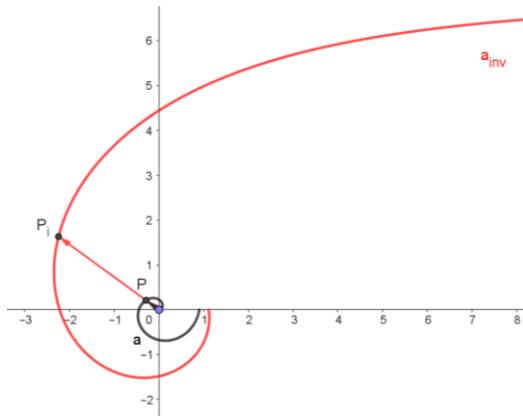


Fig. 5: Inverse curve to spiral

4 Alternative Minkowski point set product

Based on the newly determined product of two vectors

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = E_{inv} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_\perp \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_\perp & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

one can define the concept of Minkowski vector multiplication as follows:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot E_{inv} = \mathbf{c}$$

Minkowski multiplication of two vectors results in vector \mathbf{c} , which is the image of vector \mathbf{a} under linear transformation determined by matrix E_{inv} . Such operation of vector multiplication is not commutative.

Extension to Minkowski multiplication of two point sets A and B is analogous to the case of Minkowski division

$$A \otimes B = E_{inv}(A) = \{a \cdot E_{inv}, \forall (a \in A, b \in B)\}$$

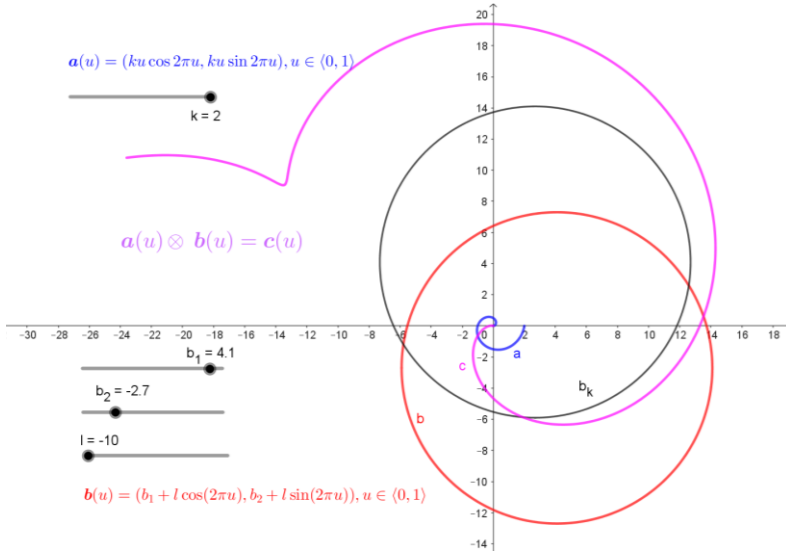


Fig. 6: Minkowski product of spiral and circle

5 Conclusion

New definition of division of two vectors and its related vector multiplication enabled to find an inverse vector to a given vector, while these two vectors are collinear. Also, a new definition of Minkowski point set division of two sets in the plane could be stated. This definition led to determination of inverse point sets, for instance inverse planar curves determined by their vector equations. Interesting forms of some inverse curves to ellipse or spiral are presented. Consequent Minkowski point set multiplication of two sets could be settled.

However, many unsolved problems and questions might arise in these context, serving as interesting ideas for further study:

1. Properties of these new vector operations
2. Properties of the linear transformation E, E_{inv}
3. Existence of invariants of the two transformations
4. Possible applications
5. Connections to curves with Pythagorean hodographs
6. Singular points (self-intersections) of Minkowski division and product of 2 planar curves
7. Related differential characteristics of Minkowski division and product of 2 planar curves

8. Extensions to higher dimensions - Minkowski division and product of two space curves, or two surfaces
9. And many others

References

- [1] C. F. Gauss: Review of his *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*, in *Werke II*, 178.
- [2] W. R. Hamilton: *Lectures on Quaternions*, 1853, preface.
- [3] H. Hankel: *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867.
- [4] F. G. Frobenius: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *J. Reine Agew. Math.*, 84 (1878) 1–63.
- [5] C. S. Peirce: On the algebras in which division is always possible, *Amer. J. Math.* 4 (1881) **225–229**.
- [6] E. Cartan: Les groupes bilinéaires et les systèmes des nombres complexes, *Ann. Fac. Sci. Univ Toulouse*, 12 (1898) B1–B99.
- [7] F. X. Grisseman: Elementarer nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmstellung der Quaternionen unter den komplexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten, *Monaths. Math. und Phys.*, 11 (1900) 132–147.
- [8] E. Cartan, E. Study: Nombres Complexes, in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris, 1908, 1:1:3, 329–488.
- [9] L. E. Dickson: On Quaternions and Their Generalization and the History of the Eight Square Theorem", *Annals of Mathematics*, Second Series, *Annals of Mathematics*, **20** (3): 155–171.
- [10] J. Milnor: Some consequences of a theorem of Bott, in *Annals of Math.*, 68 (1958) 444–449.
- [11] K. O. May: The Impossibility of a Division Algebra of Vectors in Three Dimensional Space, *American Mathematical Monthly* 73(3): 289–91. doi:10.2307/2315349
- [12] D. Hestens: Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics, *American Journal of Physics* 39 (1971), 1013–1027. <https://doi.org/10.1119/1.1986363>
- [13] J. E. H. Ramirez, E. O. Roca: Division and new multiplication between vectors, arXiv:2301.12078v1 [math.GM], <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.12078>

Geometric Problems Related to the Euclidean Minimum Spanning Tree

Šárka Voráčová

*Dept. of Applied Mathematics, Fac. of Transportation Sciences, CTU in Prague
Konviktská 20, 110 00 Prague, Czech Republic
email: sarka.voracova@cvut.cz*

Abstract. The Minimum Spanning Tree problem has been referenced in the literature as early as 1926, making it one of the oldest and most thoroughly studied problems in computational geometry. Alongside its enduring theoretical and algorithmic appeal, the MST is valuable for addressing numerous practical data analysis problems as well as image segmentation and reconstruction of the curve and surfaces.

In this paper, we present a method for point cloud decimation using the Euclidean MST algorithm. The MST can help ensure that the reconstructed curve is efficient in terms of connectivity and distance.

Keywords: Euclidean Minimum Spanning Tree, Curve reconstruction, Surface reconstruction

1 Introduction

The Euclidean minimum spanning tree (EMST) problem has applications in many fields, and many efficient algorithms have been developed to solve it. With references in the literature as early as 1926, the minimum spanning tree (MST) problem is one of the oldest and most thoroughly studied problems in computational geometry. In addition to this long-standing theoretical and algorithmic interest, the MST is useful for many practical data analysis problems. Many optimization problems can be posed as the search for the MST in a network. The MST is also used as an approximation for the traveling salesman problem [3], in document clustering, mesh generation [7], curve reconstruction [9], and surface reconstruction [11].

MST of the graph connects all the vertices, without any cycles and with the minimum possible total edge weight. EMST can be found as the minimum spanning tree of a complete graph with the points as vertices and the Euclidean distances between points as edge weights.

Problem of MST was first published in 1926 by Otakar Borůvka in the paper “O jistém problému minimálním” [4] as a method of constructing an efficient electricity network for Moravia. This algorithm is frequently called Sollin's algorithm, especially in the parallel computing literature [12].

Borůvka's algorithm finds the minimum weight edge incident with each component and adds all such edges. In each iteration, the algorithm reduces the number of trees within each connected component of the graph until only one component remains, making the forest a single tree. Borůvka's algorithm is well-

sued for parallelization, as the selection of minimum-weight edges for each component can be done independently.

Finding the nearest neighbor of components in a spanning forest is the computational bottleneck in both traditional MST algorithms like Kruskal's and Prim's and more advanced methods [1][2][5]. Borůvka's algorithms require at most $\log V$ steps and a total running time of $O(E \log V)$, where E is the number of edges and V is the number of vertices. Variants for planar graphs work with linear time complexity.

The standard procedure, known as Prim's algorithm, was formulated very clearly and concisely by the eminent number theorist Vojtěch Jarník in response to Borůvka's work. [8], [12].

2 Euclidean Minimum Spanning Tree

Computing the Euclidean Minimum Spanning Tree (EMST) is a classic problem in computational geometry. Similar to the MST, it is utilized in various applications such as clustering, pattern classification, surface reconstruction, TSP approximations, and computer graphics.

The edges of the minimum spanning tree meet at angles of at least 60° , with equality only when they form two sides of an equilateral triangle. This is because, for two edges forming any sharper angle, one of the two edges could be replaced by the third, shorter edge of the triangle they form, forming a tree with a smaller total length. Euclidean minimum spanning tree is a subgraph of other geometric graphs including the relative neighborhood graph and Delaunay triangulation. By constructing the Delaunay triangulation and then applying a graph minimum spanning tree algorithm, the minimum spanning tree of given planar points may be found in time.

Many advanced algorithms have been created to solve the Minimum Spanning Tree (MST) problem on general graphs. Fredman and Tarjan [6] demonstrated a bound of $O(E \log V)$ by using Jarník's algorithm with the Fibonacci heap data structure. However, these general algorithms are not suitable for large, metric problems because they depend linearly on the number of edges. In the case of Euclidean graphs, the edge set consists of all pairs of points. Thus, linear scaling in E corresponds to quadratic scaling in the number of points V , necessitating the consideration of alternative approaches. Shamos & Hoey [13] applied the Voronoi diagram to constructing the MST in the Euclidean plane. The Voronoi diagram can be constructed in $O(V \log V)$ time for V points and contains $O(V)$ edges. Since the MST is a subset of the edges in the dual of the Voronoi diagram, the MST can be found in $O(V \log V)$ time using one of the algorithms above. Agarwal et al. [1] showed that the EMST problem is linked to solving bichromatic closest pairs for specific subsets of the input set. *The bichromatic closest pair problem is defined as follows: given two sets of points, one red and one green, the task is to find the red-green pair with the minimum distance between them.* By employing a geometric approach that leverages well-

separated pair decomposition (WSPD), it is possible to efficiently achieve a time complexity of $O(V \log V)$ when constructing the Euclidean minimum spanning tree (EMST) in a three-dimensional space.

3 Curve Reconstruction

Our goal is to apply EMST to a point cloud and test the curve reconstruction capabilities of this method for different types of data.

Curve reconstruction entails creating a continuous curve that accurately represents a given set of points. One approach to addressing this challenge involves using a MST as part of a graph-based algorithm. The MST plays a key role in ensuring that the reconstructed curve is efficient in terms of connectivity and distance. The fundamental algorithm for curve reconstruction using MST can be delineated into six steps:

1. **Pairwise Distance Calculation:** This involves using Euclidean distance or any other suitable distance metric that is relevant to the data.
2. **Graph Creation:** Create a complete graph where each point is a node, and the edges represent the pairwise distances calculated in the previous step.
3. **Minimum Spanning Tree on the complete graph.**
4. **Path Extraction from MST:** This involves starting from an arbitrary point and traversing the MST to create a sequence of points.
5. **Curve Interpolation:** The points can be further smoothed or interpolated to get a continuous curve. Techniques such as spline interpolation (e.g., B-splines) or piecewise linear interpolation can be applied to generate a smooth curve from the discrete points obtained from the MST.

In our algorithm, we combine the Euclidean Minimum Spanning Tree (EMST) approach with the statistical method for local approximation using the moving squares method. To prevent the effects of unwanted points in the local regressions, we need to make a certain structure (as simple as possible) for the point set to define the connectivity of the point elements. From EMST we calculate the average edge length (μ) and standard deviation (σ) of the edge lengths. Then the tree was pruned by removing all edges longer than $\mu + k \cdot \sigma$, where k is a suitable constant. The choice of k affects the level of detail in the reconstruction. A smaller k preserves more details but may introduce noise, while a larger k produces a smoother but less detailed reconstruction.

The next step is to separate the components of the graphs representing the different curves:

1. **Identify the endpoints:** Vertices with degree 1 in the pruned EMST.
2. **Traverse the pruned EMST:** Start from an arbitrary endpoint and follow the edges, always choosing the edge that forms the smallest angle with the previous edge. If a junction (a vertex with degree > 2) is encountered, choose the edge that forms the smallest angle. Continue until reaching another endpoint or return to the starting point.

3. Handle branching: Connect appropriate branches at junction points. In the case of closed curves, it may be necessary to connect the last point to the first point if they are in close proximity.
4. Smooth the reconstructed curve (optional)

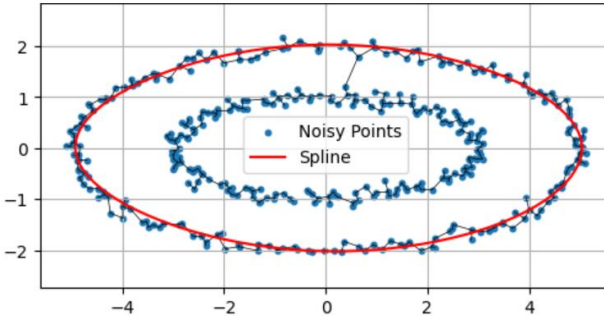


Fig. 1: Enhanced Minimum Spanning Tree from Noisy Points

The identification of connected components is a basic problem in the description of dot patterns. Cluster analysis deals with this problem and motivated our choice of minimal spanning trees as shape descriptors for curves.

A sample can be separated into clusters by removing atypically long edges from minimal spanning trees.

4 Surface reconstruction

The reconstruction of a 3D surface from a point cloud is largely dependent on the integration of the Minimum Spanning Tree (MST) methodology, which is applied to identify contiguous regions and surface texture. The use of geometric and graph-based approaches improves the creation of optimized networks that emphasize both geometric accuracy and computational efficiency.

MST is used in triangulation mainly as an initial step or as part of more complex algorithms. The basic idea is that MST provides a "skeleton" for triangulation that captures the key connections between points. In simplified terms, the procedure can be described in three steps:

1. Create an MST for a given set of points.
2. Add additional edges to the MST to create the triangulation.
3. Optimize the triangulation (e.g., using the Delaunay criterion).

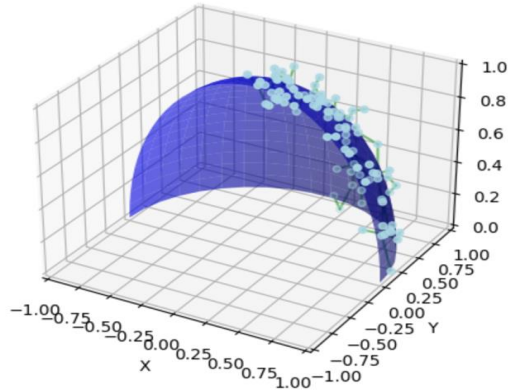


Fig. 2: 3D Euclidean minimum spanning tree and surface reconstruction

5 Conclusion

The utilization of Minimum Spanning Trees (MST) in triangulation processes offers several notable benefits. MST provides a solid starting point for establishing connections between data points, laying the groundwork for further triangulation refinement. Triangulations derived from MST often result in configurations with shorter overall edge lengths, although the MST alone does not guarantee an optimal solution. It proves to be a valuable initial step, potentially requiring further optimization to achieve the desired results. MST is instrumental in revealing underlying structures within datasets by highlighting key connections, aiding in pattern recognition, and facilitating cluster identification.

When implementing, it is important to consider the efficiency of the MST search algorithm. There are special algorithms for planar graphs that may be more efficient than general algorithms for MST. The use of MST in computational geometry often leads to algorithms that are intuitive, robust, and computationally efficient. Combining MST with other techniques in computational geometry can lead to innovative solutions to complex geometric problems.

References

- [1] Agarwal, P. K., Edelsbrunner, H., Schwarzkopf, O., & Welzl, E. (1991). Euclidean minimum spanning trees and bichromatic closest pairs. *Discrete & Computational Geometry*, 6(3), 407–422. <https://doi.org/10.1007/bf02574698>
- [2] Arya, S., & Mount, D. M. (2016). A fast and simple algorithm for computing approximate Euclidean minimum spanning trees.

- Symposium on Discrete Algorithms*, 1220–1233.
<https://doi.org/10.5555/2884435.2884520>
- [3] Arora, S. (1998). Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM*, 45(5), 753–782. <https://doi.org/10.1145/290179.290180>
- [4] Borůvka, O. (1926). O jistém problému minimálním. In *Acta Societatis Scientiarum Naturalium Moravicae* 3, 37–58, <http://dml.cz/dmlcz/500114>
- [5] Eppstein, D. (2022). Finding relevant points for Nearest-Neighbor classification. In *Society for Industrial and Applied Mathematics eBooks* (pp. 68–78). <https://doi.org/10.1137/1.9781611977066.6>
- [6] Fredman, M., Tarjan, R. (1987). Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *J. ACM*, 34(3):596–615.
- [7] Itier, V., Tournier, N., Puech, W., Subsol, G., & Pedeboy, J. (2015). Analysis of an EMST-based path for 3D meshes. *Computer-Aided Design*, 64, 22–32. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.02.005>
- [8] Jarník, V (1930). O jistém problému minimálním. (Z dopisu anu O. Borůvkovi). In *Acta Societatis Scientiarum Naturalium Moravicae* 6, 57–63 <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141045>
- [9] Lee, I. (2000). Curve reconstruction from unorganized points. *Computer Aided Geometric Design*, 17(2), 161–177. [https://doi.org/10.1016/s0167-8396\(99\)00044-8](https://doi.org/10.1016/s0167-8396(99)00044-8)
- [10] March, W. B., Ram, P., & Gray, A. G. (2010). Fast Euclidean minimum spanning tree. *Proceedings of the 16th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. <https://doi.org/10.1145/1835804.1835882>
- [11] Mencl, R. (1995). A Graph-Based approach to surface reconstruction. *Computer Graphics Forum*, 14(3), 445–456. https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.1995.cgf143_0445.x
- [12] Nešetřil, J., Milková, E., & Nešetřilová, H. (2001). Otakar Borůvka on minimum spanning tree problem Translation of both the 1926 papers, comments, history. *Discrete Mathematics*, 233(1–3), 3–36. [https://doi.org/10.1016/s0012-365x\(00\)00224-7](https://doi.org/10.1016/s0012-365x(00)00224-7)
- [13] Shamos, M., Hoey, D. (1975). Closest-point problems. In *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 151–162.

A ruler construction of imaginary numbers on a conic

Michal Zamboj

Charles University, Faculty of Education
M. Rettigová 4, 116 39 Prague 1
michal.zamboj@pedf.cuni.cz

Abstract. Arithmetic operations on a line or conic are known as von Staudt's constructions. These constructions show the properties of real numbers and their projective extension. In this contribution, we supplement a conic of real numbers by its part with imaginary numbers and introduce arithmetic operations on imaginary numbers.

Keywords: Ruler constructions, von Staudt, imaginary numbers, conics.

1 Introduction

Constructions of arithmetic operations on real numbers using a ruler and a conic were introduced by von Staudt (see [1, chap. 11], [3, pp. 166–182], [4, pp. 20–23]). Hatton in [2] revisited the principle of continuity in projective geometry and described a method to represent the imaginary part of a conic. This paper extends von Staudt's constructions from a real circle to include a rectangular hyperbola representing imaginary values.

1.1 Synthetic constructions on a circle

Addition on a circle, Figure 1

Consider a circle c with a diameter d and its tangent p at a point $0 \in c$. On c , let ∞° be the antipodal point to 0 , and 1° be the point 0 rotated counterclockwise by $\frac{\pi}{2}$ about the center of c . We will need two special lines:

l^+ is tangent to c in ∞° (line of addition),

$l^\times = \langle \infty^\circ; 0 \rangle$ (line of multiplication).¹

We will refer to this setting as *circle c with the system $(0, 1^\circ, \infty^\circ)$* .

Let us stereographically project the points \overline{A} , \overline{B} , and $\overline{(A+B)}$ (the sum of oriented distances) on p to c .

$$\begin{aligned} A^\circ &= \langle \infty^\circ; \overline{A} \rangle \cap c \\ B^\circ &= \langle \infty^\circ; \overline{B} \rangle \cap c \\ (A+B)^\circ &= \langle \infty^\circ; \overline{(A+B)} \rangle \cap c \end{aligned}$$

The sum of two points on a circle is defined by the following construction.

Construction 1 ($A^\circ + B^\circ$, Figure 1). *Given a circle c with the system $(0, 1^\circ, \infty^\circ)$ and points $A^\circ, B^\circ \in c$. Construct $A^\circ + B^\circ$.*

¹For the sake of clarity, we denote lines $\langle A; B \rangle$ throughout the paper.

1. $Z^+ = \langle A^\circ; B^\circ \rangle \cap l^+$
 - (a) if $A^\circ = B^\circ$, their join is the tangent to c in A°
 - (b) if $\langle A^\circ; B^\circ \rangle \parallel l^+$, then Z^+ is the improper point of l^+
 - (c) if $A^\circ = B^\circ = \infty^\circ$, then $Z^+ = \infty^\circ$
2. $A^\circ + B^\circ \in \langle Z^+; 0 \rangle \cap c$
 - (a) if Z^+ is improper, then $A^\circ + B^\circ = 0$, otherwise we choose the second intersection $\langle Z^+; 0 \rangle \cap c \neq 0$

The following theorem states that this construction is equivalent to the stereographic projection of the sum carried out on an affine line.

Theorem 1. *Given a circle c with the system $(0, 1^\circ, \infty^\circ)$ and points A°, B° . Let p be the tangent to c in $0, \bar{A} = \langle \infty^\circ; A^\circ \rangle \cap p, \bar{B} = \langle \infty^\circ; B^\circ \rangle \cap p$, and $\overline{(A+B)}$ be the oriented sum $\bar{A} + \bar{B}$ on p . Moreover, let $(A+B)^\circ = \langle \infty^\circ; \overline{(A+B)} \rangle \cap c$. Then $(A+B)^\circ = A^\circ + B^\circ$ (according to Construction 1).*

Multiplication on a circle, Figure 2

Let us have the oriented product $\overline{(A \times B)}$ on p and construct its stereographic image

$$(A \times B)^\circ = \langle \infty^\circ; \overline{(A \times B)} \rangle \cap c.$$

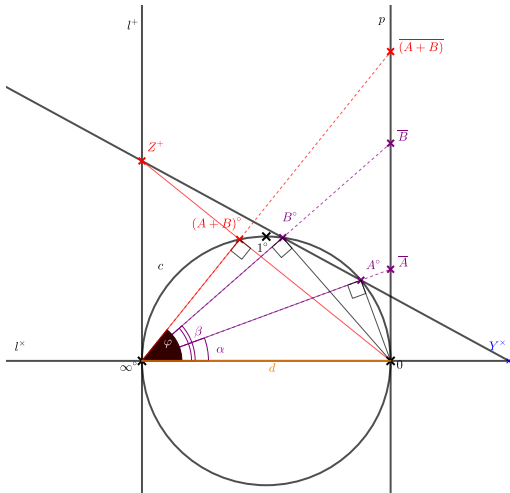


Fig. 1: The construction and stereographic projection of the sum of two points.

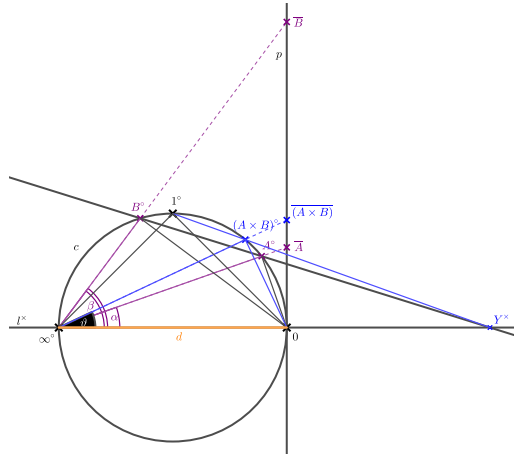


Fig. 2: The construction and stereographic projection of the product of two points.

The product of two points on a circle is defined as follows.

Construction 2 ($A^\circ \times B^\circ$, Figure 2). *Given a circle c with the system $(0, 1^\circ, \infty^\circ)$ and points A°, B° . Construct $A^\circ \times B^\circ$.*

1. $Y^\times = \langle A^\circ; B^\circ \rangle \cap l^\times$

(a) if $A^\circ = B^\circ$, their join is the tangent to c in A°

(b) if $\langle A^\circ; B^\circ \rangle \parallel l^\times$, then Y^\times is the improper point of l^\times

(c) if $A^\circ = \infty^\circ$ and $B^\circ = 0$ (or vice-versa), then Y^\times is not defined, as well as the product

2. $A^\circ \times B^\circ = \langle Y^\times; 1^\circ \rangle \cap c$

(a) if Y^\times is improper, then $A^\circ \times B^\circ = 1^\circ$, otherwise we choose the second intersection $\langle Y^\times; 1^\circ \rangle \cap c \neq 1^\circ$

Theorem 2. *Given a circle c with the system $(0, 1^\circ, \infty^\circ)$ and points A°, B° . Let p be the tangent to c in 0 , $\bar{A} = \langle \infty^\circ; A^\circ \rangle \cap p$, $\bar{B} = \langle \infty^\circ; B^\circ \rangle \cap p$, and $\overline{(A \times B)}$ be the oriented product $\bar{A} \times \bar{B}$ on p . Moreover, $(A \times B)^\circ = \langle \infty^\circ; \overline{(A \times B)} \rangle \cap c$. Then $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ (according to Construction 2).*

1.2 Constructions on regular conics

The constructions on a circle are based only on the incidence properties of lines and a circle. Such constructions are invariant with respect to a collineation. Therefore, these constructions can be transferred to any

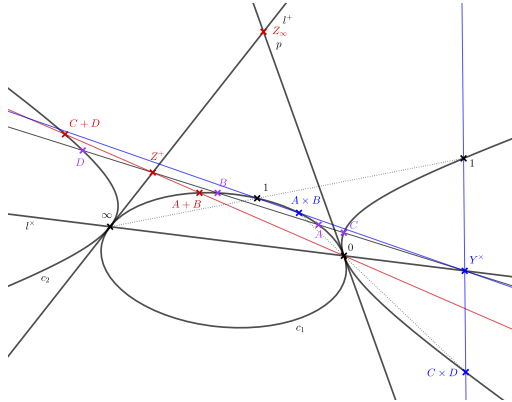


Fig. 3: Projective system and constructions on an ellipse and hyperbola.

regular conic, viewed as a collinear image of a circle (Figure 3). In general, the system $0, 1, \infty$ can be arbitrarily chosen by three distinct points (the choice on the circle is a special case for the purposes of this text). For example, the parabolic case is described in [5].

Projection to a rectangular hyperbola, Figure 4

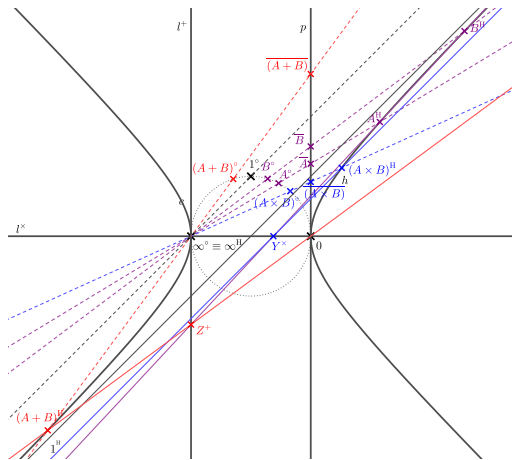


Fig. 4: Projection between a circle and rectangular hyperbola.

We now project the entire setup from ∞° onto a rectangular hyperbola with vertices at 0 and $\infty^\circ = \infty^H$. In this particular case, the point 1^H is one of the improper points of the hyperbola, and so the lines through 1^H

appear parallel to the asymptote (in the Euclidean model of the projectively extended plane). The constructions of sum $A^H + B^H = (A + B)^H$ and product $A^H \times B^H = (A \times B)^H$ work in the same way as in the circle.

2 Imaginary numbers

By adding imaginary elements, we supplement the circle model $Re(c)$ of extended real numbers with ∞ . To do so, we use a rectangular hyperbola $Im(c)$ that contains imaginary numbers (Figures 4 and 5). The points 0 and $\infty = i\infty$ belong to both $Re(c)$ and $Im(c)$, the point 1 is on the circle, and 1 on the hyperbola becomes the imaginary unit i (improper in the model). We will refer to the composition above as *circle-hyperbola c with the system $(0, 1, i, \infty)$* .

From the stereographic projection, it is easy to observe that we can interchange real and purely imaginary points with the same value (i.e., $\langle \infty; A^\circ \rangle$ and $\langle \infty; A^H \rangle$ coincide in \bar{A}). Thus, a real point A stereographically projected from $Re(c)$ to $Im(c)$ with the center ∞ of the projection is the purely imaginary point iA , and vice versa (division by i from $Im(c)$ to $Re(c)$). For an imaginary point A , we need to use the opposite value, so it is the real point $iA = -A$. In summary, we have the following construction of iA .

Construction 3 (iA , $A \in Re(c)$ or $Im(c)$, Figure 5). *Given a circle-hyperbola c with the system $(0, 1, i, \infty)$ and a point $A \in Re(c)$ or $Im(c)$. Construct iA .*

1. if $A \neq \infty \in Re(c)$, $iA = \langle \infty; A \rangle \cap Im(c) \neq \infty$
2. if $A \neq \infty \in Im(c)$, $iA = \langle \infty; -A \rangle \cap Re(c) \neq \infty$
3. if $A = \infty$, $iA = \infty$

An alternative construction of iA , for $A \in Im(c)$, might be carried out using a projection through 0 such that $iA = \langle 0; A \rangle \cap Re(c)$. Observe that a variation of the construction gives us an incidence generation of a rectangular hyperbola from its vertex circle. The points of the hyperbola are intersections of $\langle \infty; A \rangle \cap \langle -A; 0 \rangle$ for $A \in Re(c)$. In reverse, the points of a circle are the same intersections for $A \in Im(c)$. A (compass) variation of the construction of iA from A or backward, based on the fact that $\triangle \langle 0; A; iA \rangle$ is right, can be carried out using a Thales circle or right angle.

3 Conclusion

In this paper, we have shown how to extend von Staudt's algebra of throws on a circle by imaginary numbers on a conjugated hyperbola. We encourage the reader to continue with experiments with multiplication on imaginary numbers, square roots such as $\sqrt{-1}$, etc. Rotation of the hyperbola $Im(c)$ in a 3-D space by $\frac{\pi}{2}$ about $\langle \infty; 0 \rangle$ and projecting it to a sphere with

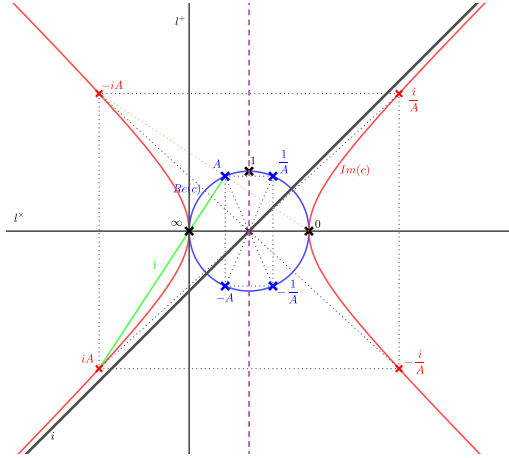


Fig. 5: Multiplication by the imaginary unit.

the meridian circle $Re(c)$ and the same center will attach this model to the real and imaginary circles on a Riemann sphere.

References

- [1] H. S. M. Coxeter: *The real projective plane* 3rd ed., Springer Verlag, New York, 1993.
- [2] J. L. S. Hatton: *The Theory of the Imaginary in Geometry: Together with the Trigonometry of the Imaginary*. Cambridge University Press, 1920.
- [3] K. G. Ch. von Staudt: *Beiträge zur Geometrie der Lage I, II & III*. Fr. Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg, 1856.
- [4] M. Zamboj: *Synthetic Projective Geometry*. Dissertation thesis, Charles University, 2018.
- [5] M. Zamboj: Rapsódie na parabole. In *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, 20 (2023), no. 40, pp. 49-59.

List of Participants

BARTOŇ	Michael	Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao
BASTL	Bohumír	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
BERÁNKOVÁ	Eliška	Univerzita Palackého v Olomouci
BIZZARRI	Michal	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
CIBULKA	Jaroslav	Fakulta strojní, ČVUT v Praze
ČEČÁKOVÁ	Stanislava	Fakulta architektury ČVUT v Praze
FERDIÁNOVÁ	Viera	Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
GERGELITSOVÁ	Šárka	Gymnázium Benešov
HAMAJOVÁ	Klaudia	FMFI, UK, Bratislava
HAŠEK	Roman	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
HLAVOVÁ	Marta	Fakulta strojní, ČVUT v Praze
HOLAN	Tomáš	Univerzita Karlova, Praha
HRDINA	Jaroslav	Vysoké učení technické v Brně
HUCZALA	Daniel	University of Innsbruck
CHALMOVIANSKÝ	Pavel	FMFI, UK, Bratislava
CHODOROVÁ	Marie	PřF, Univerzita Palackého v Olomouci
KOKTAVÁ	Marie	Mendelova univerzita v Brně
KOLÁŘOVÁ	Dana	Fakulta architektury ČVUT v Praze
KOLCUN	Alexej	Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita
KUBÁT	Jakub	České vysoké učení technické v Praze
LÁVIČKA	Miroslav	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
LEGERSKÝ	Jan	České vysoké učení technické v Praze
MOLNÁR	Michal	Univerzita Karlova
REČKOVÁ	Alena	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
RIHTÁRIKOVÁ	Daniela	Strojnícka fakulta, STU v Bratislave
SLABÁ	Kristýna	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
STACHEL	Hellmuth	Vienna University of Technology
ŠÍR	Zbyněk	Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha
ŠRUBAŘ	Jiří	České vysoké učení technické v Praze
TKADLECOVÁ	Miroslava	Mendelova univerzita v Brně
TOMICZKOVÁ	Světlana	Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
URBAN	Zbyněk	VŠB - Technická univerzita Ostrava
VAJSÁBLOVÁ	Margita	Stavebná fakulta, STU v Bratislave
VELICHOVÁ	Daniela	Strojnícka fakulta, STU v Bratislave

VORÁČOVÁ Šárka Fakulta dopravní, ČVUT v Praze
VRÁBLÍKOVÁ Jana Johannes Kepler University Linz
VRŠEK Jan Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
VÝRUT Radek Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni
ZALABOVÁ Lenka PF, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
ZAMBOJ Michal PF, Univerzita Karlova, Praha

Proceedings of the
10TH CZECH-SLOVAK CONFERENCE
ON GEOMETRY AND GRAPHICS 2024

Editors:
Michal Bizzarri, Miroslav Lávička

Published by
Jednota českých matematiků a fyziků,
pobočný spolek Plzeň
Kollárova 1239/19, Plzeň

First Edition

Plzeň 2024

ISBN 978-80-11-05926-2 (online)