



SLOVENSKÝ ČASOPIS PRE GEOMETRIU A GRAFIKU
ročník 20, číslo 40, 2023
ISSN 1336-524X

G

Slovenský časopis pre geometriu a grafiku

Ročník 20 (2023), číslo 40

ISSN 1336-524X

Vydáva:

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

SSGG

Vedúca redaktorka:

Daniela Velichová

Výkonné redaktorky:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Redakčná rada:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmet'ová

Margita Vajsáblová

G je vedecký časopis pre geometriu a grafiku publikujúci originálne vedecké práce, prehľady a informatívne články, krátke referáty, odborné príspevky, analýzy, aktuality a rešerše z rôznych odvetví geometrie (elementárna, deskriptívna, konštrukčná, projektívna, analytická, diferenciálna, algebrická, počítačová, výpočtová, konečná, neeuklidovská) a topológie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, v oblasti základného teoretického výskumu, v oblasti výučby geometrie na všetkých typoch škôl, z histórie a metodológie vývoja geometrie, a z aplikácií geometrie a geometrických metód v rôznych vedeckých, spoločenských a technických disciplínach.

Redakcia: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku

IČO: 31 816 304

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta

Slovenská technická univerzita v Bratislave

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava

Objednávky, reklamácie a predplatné vybavuje:

Redakcia G - SSGG

ÚMF SJF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava

sogg@sogg.sk

Periodicita: Časopis vychádza dvakrát do roka v náklade 200 kusov.

Ročné predplatné bez poštovného a balného je 20,- Eur.

Evidenčné číslo EV 3228/09

Informácie a pokyny pre autorov na adrese: www.sogg.sk

Tlačí: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

Časopis G je evidovaný v: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG december 2023, Bratislava, číslo 2/2023

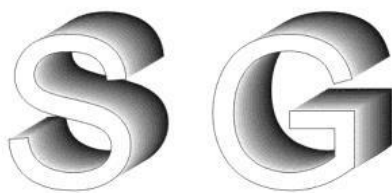
Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tejto publikácie sa nesmie reprodukovat', ukladať do informačných systémov alebo rozširovať akýmkoľvek spôsobom, či už elektronicky, mechanicky, fotografickou reprodukciou alebo ináč, bez predchádzajúceho písomného súhlasu vlastníkov práv. Všetky príspevky uverejnené v časopise prešli odbornou recenziou.



Obsah – Contents

Symetria, krása a úžitok Symmetry, beauty and benefit Veronika Gáliková	5
Jednodílný rotačný hyperboloid Nalezení parametrizace a vytvoření vizualizace v programu Maple One-sheet rotational hyperboloid Derivation of parameterization and creation of visualization in program Maple Alice Králová	19
Armiloid – plochy pselické a spirické Armiloid – pselical and spirical surfaces Daniela Velichová	35
Rapsódie na parabole Rhapsodies on parabola Michal Zamboj	49

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ



PRE GEOMETRIU A GRAFIKU

Nezisková vedecká spoločnosť pre rozvoj geometrie a počítačovej grafiky

zaregistrovaná dňa 13.5.2002 na Ministerstve vnútra SR ponúka
všetkým záujemcom individuálne alebo kolektívne členstvo.
Elektronickú prihlášku nájdete na domovskej stránke spoločnosti.

Cieľom spoločnosti je stimulovať vedecký výskum, aplikácie i pedagogickú prácu
a metodiku vyučovania v oblasti geometrie a počítačovej grafiky.

Spoločnosť pôsobí na celom území Slovenskej republiky a jej poslaním je:

- a) podporovať rozvoj geometrie a počítačovej grafiky a ich vzájomnej interakcie
- b) presadzovať kvalitu geometrického a grafického vzdelania na všetkých typoch škôl v SR
- c) spolupracovať s medzinárodnými spoločnosťami a organizáciami rovnakého zamerania
- d) podieľať sa na organizácii vedeckých podujatí, konferencií, seminárov a sympózií o geometrii a počítačovej grafike
- e) publikovať vedecký časopis s názvom G venovaný geometrii a grafike
- f) rozvíjať vlastnú edičnú a publikačnú činnosť
- g) získať priazeň a členstvo organizácií aj jednotlivcov.

Vítané sú všetky ďalšie aktivity – diskusné fórum na Internete, softvérový bazár, workshopy, e-learningové kurzy ai., ktoré možno vykonávať pod hlavičkou spoločnosti.

Spoločnosť SSGG
Ústav matematiky a fyziky
Strojnícka fakulta STU v Bratislave
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, SR
e-mail: ssgg@ssgg.sk, URL: www.ssgg.sk

Symetria, krása a úžitok

Veronika Gáliková

Abstrakt

Symetria je pojem spájajúci relatívnosť a absolútnosť. Vykazovať symetriu znamená mať črty, ktoré sa zachovávajú napriek nejakým zmenám. Menené aspekty sú teda z hľadiska symetrie relatívne, a tie, čo ostali zachované, absolútne. Je to tiež pojem spájajúci krásu, hru a pravidlá. V našom texte sa pozrieme na tento jav v prírode, umení a vede.

Kľúčové slová: symetria, transformácia, invariant, krása

Abstract

Symmetry is a concept combining relativity and absoluteness. To show symmetry is to have traits that are retained despite some changes. Thus, the changed aspects are relative in terms of symmetry, and those that have been preserved are absolute. It is also a concept combining beauty, play and rules. In our text we will look at this phenomenon in nature, art and science.

Keywords: symmetry, transformation, invariant, beauty

Táto rozprava o symetrii je myslená ako predstavenie rozsiahleho výskytu tohto javu. Práve tie veci, ktoré sa vyskytujú veľmi univerzálne, sú niekedy nepovšimnuté. V purpurovom svete by slovo purpur azda ani neexistovalo, lebo by to bol aspekt patriaci ku všetkému. Možno by sa zaviedlo, ak by existovali rôzne miery purpurovosti – a v niečom podobná je situácia so symetriou.

Ľudia si niekedy dávajú hádanky typu "Prečo je havran ako písací stôl" (Alica v krajine zázrakov), a sú radi, ak sa im podarí nájsť aspoň jeden zmysel, v ktorom veci súvisia. Ohľadne symetrie je ťažko nájsť niečo, čo s ňou nesúvisí. (Dokonca aj ten havran a písací stôl majú okrem iného ¹spoločné isté symetrie.). Poďme sa na tento rozšírený jav, tak často braný ako samozrejmosť, pozrieť trochu sústredenejšie. Nakoniec pravidlo "rozmyšľať hlboko nad jednoduchými vecami" požaduje práve toto – pozrieť sa nanovo na veci "notoricky známe".

1 Čo je symetria a prečo sa starať

Ťažko nájsť univerzálne prijatú definíciu niečoho tak rozšíreného v rozličných kontextoch. Pre účely tohoto nášho pojednania budeme symetriu chápať nasledovne:

Ak po prevedení určitej transformácie na systéme ostane nejaká jeho charakteristika zachovaná, je táto transformácia v danom ohľade symetriou a spomenutá charakteristika invariantom.

Prečo sa o symetriu zaujímať:

- Hojný výskyt symetrií naznačuje možnosť siahnuť na nejaký hlboký, spoločný princíp, vlastný mnohým javom.
- Máme sklon ich rozpoznávať. Využime talent, ak nejaký máme. Hľadať stratené kľúče tam, kde je tráva najnižšia a osvetlenie najlepšie, nie je zlá stratégia, ak nevieme, kde

¹ Napríklad havran aj písací stôl súvisia s povestou istého romantického básnika.

sme ich stratili. Tam, kde je viac svetla, máme aspoň šancu hľadanú vec nájsť, ak tam je.

- Aj bez toho, aby sme im celkom rozumeli, už sa ukázali ako náramne pekné a užitočné: sprevádzajú ich vzory a pravidelnosti, ktoré umožňujú klasifikáciu (poriadok v systéme) objektov, komprimáciu dát, súvisia so zákonmi zachovania. Ťažko adekvátne zdôrazniť, aké dopady má tento aspekt napríklad na fyziku – zlepšuje predpovednú schopnosť teórií a je akýmsi mostom k ich rozšíreniu.

2 Očividné a inak viditeľné

Pozrime sa najprv na typické príklady symetrie, vo všeobecnosti často spájané s týmto javom vďaka vizuálnemu prejavu. Na obrázkoch nižšie máme tri systémy: motýľ, snežienka a kvet pakostu. Na každý z týchto objektov možno aplikovať istú transformáciu bez toho, aby sme obrázok vizuálne zmenili. Takými transformáciami je pootočenie snežienky o celočíselný násobok tretiny celej otáčky, pootočenie pakostu o celočíselný násobok päťtiny celej otáčky, pootočenie motýľa o celočíselný násobok celej otáčky, zrkadlové "preklopenie" týchto objektov vzhľadom na isté osi. Pri motýľovi je to os prechádzajúca pozdĺžne jeho telom, pri kvietkoch je takýchto osí viac.



Obr. 1. Prechádzky po lese ako príležitosť na štúdium pravidiel krásy

Čitateľa azda zarazí uvedenie "celej otáčky" ako symetrie. Veď je to také samozrejmé ... nie je azda podoba všetkého "imúnna", invariantná voči takejto transformácii? Toto pripomína "purpurovosť" v purpurovom svete zmienenú v úvode.² Toľko vecí je invariantných, symetrických v zmysle jednej otáčky o 360° ... To však neznačí nezaujímavosť takejto transformácie, ale fakt, že súvisí so symetriou niečoho, čo je spoločné všetkým tým veciam, čo boli vzhľadom na ňu invariantné. So symetriou samotného priestoru! Toto je "purpur" v zmysle nášho podobenstva z úvodu, a skúmanie jeho "samozrejmostí" už prinieslo pár vytriezvení z predstáv, ako samozrejmostiam rozumieme (antihmota a jej pomer k hmote je len jeden z príkladov).

Postúpme k ďalším typom symetrie, azda menej známym pod týmto menom:

Každé mačiatko je približne osovo symetrické ("zrkadlovým" spôsobom), ale uvažujme ako systém nie jedno zvieratko, ale celú svorku. Sú tu potom ďalšie operácie, ktoré možno previesť

² Ale s tým rozdielom že náš svet ani nie je celý purpurový. Sú objekty, ktoré treba otočiť o dvakrát "celú otáčku", aby operácia bola symetriou. Ale to je príbeh, o ktorom treba azda pojednať podrobnejšie inokedy.

a pritom približne zachovať obrázok ako je. Možno vymeniť dvojčky podobných mačiatok – dve sivé v strede alebo dve hnedé vpravo. Takémuto poprehadzovaniu poradia sa hovorí permutácia. Nie každá permutácia je v tomto prípade "farebnou" symetriou; keby sme permutovali rôznofarebné mačiatka, zmena farebnosti obrázka by bola badateľná. Ale každá permutácia je "mačiatkovskou" symetriou. (Vymenené alebo nie, stále sú to mačiatka.)



Obr. 2. Prečo je svorka mačiatok roztomilejšia ako súčet roztomilostí jednotlivých zvieratiek?

Symetria sa oddávna spája s krásou, a treba sa zamyslieť, akú rôznorodú symetriu vnímame ako krásnu. Predstavme si lúku plnú margarétok alebo obilné pole. Jednotlivé kvietky alebo klasy majú svoje geometrické symetrie, ktoré prispievajú svojim dielom k celej nádhere, ale je tu ešte aj (okrem mnohého iného) permutačná symetria, ktorú málokedy explicitne spomenieme, ale azda má podiel na tom, že krása poľa či lúky je viac ako len suma krás jednotlivých prvkov. A tu je aj náznak javu "emergencie" o ktorom sa vedú debaty medzi vednými odborníkmi³. V našom prípade je to otázka toho, či na základe vlastností komponent – jednotlivých margarétok, travín atď. vieme povedať všetko o celku (lúke). Tu to vyzerá, že nie. Permutačná symetria kytice sa nepopíše na základe znalosti symetrie jednotlivých margarétok – dá sa považovať za vlastnosť celku, o ktorej ani nebolo ako hovoriť jazykom jednotlivých častí. Alebo sme medzi časti nezahrnuli všetko.

3 Hon za krásou

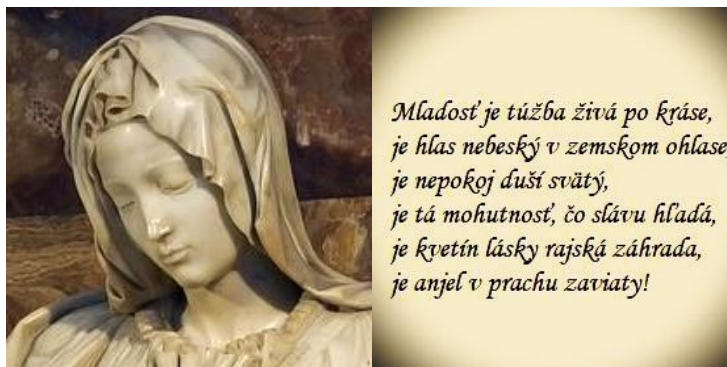
Symetrie nielen objavujeme ako krásu, ale ich princípy používame, keď chceme niečo krásne vytvoriť. V klasickom umení je spojenie obzvlášť výrazné.

Najprv sa pozrime na vizuálnu, geometrickú symetriu v umení. Rozličné staré stavby oplývajú mnohorakou symetriou. Táto bola často volená aj z praktických dôvodov. Keďže sily pôsobiace na stavbu vykazujú určité symetrie, zrkadlia sa tieto aj v kompenzácii týchto síl oporným systémom stavby – usporiadaním múrov, stĺpov, nosníkov, oblúkov atď. Tento oporný systém, prispôbený symetrii vplyvov pôsobiacich na stavbu, sa tak aj sám stáva ozdobou.

Keď Michelangelo predstavil svoje veľdielo – Pietu, ľudia sa pozastavovali nad mladistvým vzhľadom Božej Matky. Poznamenajme tu čosi ohľadne znázornenia tejto mladistvosti. Veľmi k nej prispieva fakt, že tvár Panny Márie je takmer dokonale symetrická, ako tomu býva u veľmi mladých ľudí. Keď sa bunkám darí, darí sa im symetricky. Problémy nastávajú nerovnomerne

³ Veľmi zhruba napríklad o tom, či biológia je len aplikovaná chémia a chémia len rozvinutá fyzika atómového obalu a podobne.

– drobné úrazy s jazvami, poškodené zásobovanie živinami či prasknuté žilky, ... a pravdepodobnosť, že niečo také nastane, sa u nás kumuluje s časom.



Obr. 3. Hľadanie pravidiel krásy

V literatúre je symetria tiež do istej miery vizuálna – aj akustická či pojmová ... Predstavme si napríklad báseň s viazaným veršom. Aj cudzinec neovládajúci jazyk, v ktorom je napísaná, si môže všimnúť istú periodicitu – a periodicitu je symetriou. Príslušnou transformáciou, ktorá "nejaký aspekt zachováva", je posunutie sa o verš či niekoľko veršov ďalej, a zachováávajúca sa vec môže byť kombinácia hlások na konci, alebo aj melódia celého verša a pod. Mnoho umeleckých prostriedkov v literatúre využíva symetriu v abstraktnejšom zmysle – napríklad prirovnanie, paralela, podobenstvo nám poskytujú ako systém dve porovnávané veci či situácie, a prechod od jednej k druhej zachová to, čo majú spoločné, čím sa podobajú.

S hudbou a tancom je to podobné ako s básňami a ďalšími umeleckými prejavmi používajúcimi periodicitu – refrény, opakujúce sa motívy a pod. sú istým druhom symetrie (a nie jediným, ktorý sa tu dá nájsť).



Obr. 4. Hra bez pravidiel je bezo zmyslu

4 Architektúra na oblohe

Spomenuli sme v súvislosti so starými stavbami, ako ich oporný systém zohľadňoval symetrie vonkajších vplyvov. Pozrime sa teraz na takéto "vplyvy", sily v prírode. Nielen štruktúry postavené človekom vykazujú symetrie – tieto sa odrážajú v tvare hviezd, slnečnej sústavy a galaxií, snehových vločiek a hladiny mora ...

Jedným z najnápadnejších tvarov v slnečnej sústave je súbor do seba vložených koncentrických sférických vrstiev, "obálok" dohromady tvoriacich guľu. Takýto tvar má Slnko, Mesiak,

planéty ... Zloženie sa mení v závislosti od vzdialenosti r od stredu. Jednotlivé vrstvy sa líšia materiálom, teplotou, hustotou ... Materiál v rámci jednej takejto škrupinky je približne rovnaký vo všetkých smeroch (napr. Zem tvorí výnimku, čo sa týka vrstvy posledných niekoľko kilometrov pri povrchu). Teda je tu rotačná symetria, odraz symetrie Newtonovho gravitačného zákona, podľa ktorého častica hmotnosti m patriaca do škrupinky s polomerom r podlieha gravitačného vplyvu hmoty M v guli ohraničenej touto škrupinkou:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$



Obr. 5. Sférická symetria je obľúbený vzor v Slnečnej sústave

Sférická symetria nebeských telies je očividná; všimnúť si symetriu na úrovni matematickej formulky je niekedy trochu menej samozrejmé, pretože to vyžaduje všimnúť si na čom z hľadiska skúmaného javu nezáleží. Ak napríklad zmeníme vzdialenosť od stredu r , sila bude iná – na zmene vzdialenosti od stredu z hľadiska veľkosti sily záleží. Ale ak prevedieme rotáciu a porovnáme veľkosť sily na dvoch miestach v rovnakej vzdialenosti od stredu, len pootočených jedno vzhľadom na druhé (sférické súradnice θ , ϕ sú rôzne pre dané miesta), veľkosť sily ostáva rovnaká, je to z hľadiska takýchto transformácií invariant. Keďže na natočení z hľadiska veľkosti sily nezáleží, body líšiace sa len takouto symetrickou transformáciou sú z hľadiska daného invariantu ekvivalentné.

Skúmanie symetrií vyžaduje niekedy takéto "čítanie medzi rovnosťami" a potom správnu interpretáciu, čo je vec cviku a poznania istých matematických trikov. Upozorníme napríklad, že ak formulka mlčí o nejakej veličine, stále s ňou môže mať veľa spoločné, pretože veličina tam môže byť skryto vyjadrená cez iné. Napríklad v našej formulke pre veľkosť sily nevystupuje explicitne karteziánska súradnica x – ale je tam skryto vo vzdialenosti r . A opačne, ak aj formulka hovorí explicitne o nejakých veličinách, neznamená to, že žiadna ich zmena nemôže byť symetriou. Napríklad vzorec pre veľkosť gravitačnej sily je možné napísať aj v karteziánskych súradniciach, teda ako

$$F = G \frac{Mm}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Všetky karteziánske súradnice x , y , z tu explicitne vystupujú, a je pravda, že zmena ktorejkoľvek jednej z nich nie je symetriou čo sa veľkosti sily týka. Ale existuje celá trieda špeciálne koordinovaných zmien týchto súradníc (rotácie), kde zmena jednej kompenzuje

zmenu inej práve tak, aby sa zachovala kombinácia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ relevantná pre veľkosť sily – a teda, aby sa aj táto zachovala.

Poučením okrem iného je, že rozpoznať symetriu nie je celkom triviálna vec. Existujú súbory matematických nástrojov užitočných pri love symetrií. Niekoľko ich je spomenutých ďalej v tomto texte. Ak sa človek s obmedzenými časovými možnosťami rozhoduje, do ktorej partie matematiky investovať čas, štúdium pojmov ako symetria, ekvivalencia a invariant je konzervatívna voľba s takmer istým výnosom, vzhľadom na to, že v súčasnej fyzike tieto pojmy súvisia prakticky so všetkým.

5 Poézia periodickej tabuľky

Symetrie by sme teda mohli zmieniť v súvislosti s každou partiou fyziky. A nielen tej. Chémia má ako svoju základnú zbierku dát periodickú tabuľku prvkov. Vzory a pravidelnosti v týchto dátach sú jav doteraz plne nepopísaný. Snáď kdesi v matematickej divočine ešte nenarušenej ľudskými snahami čakajú rovnice, ktorých symetrie zrkadlia aspoň čiastočne pravidlá elektrónových orbitálov. Ale zatiaľ sa podarilo nájsť rovnicu, ktorá takúto úlohu prijateľne plní, iba pre prvý prvok, vodík. Na jej základe sa dá čosi usúdiť aj o ostatných, a do istej miery takéto približné úvahy fungujú. Elektrónové konfigurácie atómových obalov sa však dajú reprezentovať istými modelmi aj bez toho, aby nám bolo o nich všetko jasné – nakoniec ani pre ten prvý vodík nám všetko jasné nie je. S uvedeným upozornením, že sa pohybujeme na nevelmi porozumenej pôde, poďme rázne poobdivovať prvky v tabuľke.

Periodic Table of the Elements																	
1 H 1.008 Hydrogen																	2 He 4.003 Helium
3 Li 6.941 Lithium	4 Be 9.012 Beryllium											5 B 10.811 Boron	6 C 12.011 Carbon	7 N 14.007 Nitrogen	8 O 15.999 Oxygen	9 F 18.998 Fluorine	10 Ne 20.180 Neon
11 Na 22.990 Sodium	12 Mg 24.305 Magnesium											13 Al 26.982 Aluminum	14 Si 28.086 Silicon	15 P 30.974 Phosphorus	16 S 32.066 Sulfur	17 Cl 35.453 Chlorine	18 Ar 39.948 Argon
19 K 39.098 Potassium	20 Ca 40.078 Calcium	21 Sc 44.956 Scandium	22 Ti 47.88 Titanium	23 V 50.942 Vanadium	24 Cr 51.996 Chromium	25 Mn 54.938 Manganese	26 Fe 55.933 Iron	27 Co 58.933 Cobalt	28 Ni 58.693 Nickel	29 Cu 63.546 Copper	30 Zn 65.39 Zinc	31 Ga 69.723 Gallium	32 Ge 72.61 Germanium	33 As 74.922 Arsenic	34 Se 78.96 Selenium	35 Br 79.904 Bromine	36 Kr 83.80 Krypton
37 Rb 85.468 Rubidium	38 Sr 87.62 Strontium	39 Y 88.906 Yttrium	40 Zr 91.224 Zirconium	41 Nb 92.906 Niobium	42 Mo 95.94 Molybdenum	43 Tc 98.907 Technetium	44 Ru 101.07 Ruthenium	45 Rh 102.906 Rhodium	46 Pd 106.42 Palladium	47 Ag 107.868 Silver	48 Cd 112.411 Cadmium	49 In 114.818 Indium	50 Sn 118.71 Tin	51 Sb 121.760 Antimony	52 Te 127.6 Tellurium	53 I 126.905 Iodine	54 Xe 131.29 Xenon
55 Cs 132.905 Cesium	56 Ba 137.327 Barium	57-71 Lanthanide Series	72 Hf 178.49 Hafnium	73 Ta 180.948 Tantalum	74 W 183.85 Tungsten	75 Re 186.207 Rhenium	76 Os 190.23 Osmium	77 Ir 192.22 Iridium	78 Pt 195.08 Platinum	79 Au 196.967 Gold	80 Hg 200.59 Mercury	81 Tl 204.382 Thallium	82 Pb 207.2 Lead	83 Bi 208.980 Bismuth	84 Po [209] Polonium	85 At 209 Astatine	86 Rn 222.018 Radon
87 Fr 223.020 Francium	88 Ra 226.025 Radium	89-103 Actinide Series	104 Rf [261] Rutherfordium	105 Db [262] Dubnium	106 Sg [266] Seaborgium	107 Bh [264] Bohrium	108 Hs [269] Hassium	109 Mt [268] Meitnerium	110 Ds [271] Darmstadtium	111 Rg [272] Roentgenium	112 Cn [277] Copernicium	113 Nh [284] Nihonium	114 Fl [289] Flerovium	115 Uup [288] Ununpentium	116 Lv [293] Livermorium	117 Uus [294] Ununseptium	118 Uuo [294] Ununoctium
57 La 138.906 Lanthanum	58 Ce 140.115 Cerium	59 Pr 140.908 Praseodymium	60 Nd 144.24 Neodymium	61 Pm 144.913 Promethium	62 Sm 150.36 Samarium	63 Eu 151.966 Europium	64 Gd 157.25 Gadolinium	65 Tb 158.925 Terbium	66 Dy 162.50 Dysprosium	67 Ho 164.930 Holmium	68 Er 167.26 Erbium	69 Tm 168.934 Thulium	70 Yb 173.04 Ytterbium	71 Lu 174.967 Lutetium			
89 Ac 227.028 Actinium	90 Th 232.038 Thorium	91 Pa 231.036 Protactinium	92 U 238.029 Uranium	93 Np 237.048 Neptunium	94 Pu 244.064 Plutonium	95 Am 243.061 Americium	96 Cm 247.070 Curium	97 Bk 247.070 Berkelium	98 Cf 251.080 Californium	99 Es [254] Einsteinium	100 Fm 257.095 Fermium	101 Md 258.1 Mendelevium	102 No 259.101 Nobelium	103 Lr [262] Lawrencium			

Obr. 6. Verše v orbitáloch. Zdroj: sciennotes.org/printable-periodic-table

Je tu opäť množstvo symetrií. Aká poetická by mala byť veda, ktorej základné dáta sú uložené vo veršoch rýmujúcich sa po celej dĺžke: riadky tabuľky javia opakujúce sa štruktúry nielen na konci, v poslednom stĺpci, ale vo všetkých! Obaly atómov v jednom stĺpci majú rovnaké "koncovky", počet valenčných elektrónov. Postupom k prvkom s vyšším počtom elektrónov sledujeme aj pribúdanie "refrénov", typov orbitálov v ďalších a ďalších energetických vrstvách.

A to sme ešte len pri prvkoch – vlastne prevažne pri ich obaloch. Jadrové štruktúry, usporiadania nukleónov vytvárajú ďalšie aspekty celej skladby, nepochybne dokonale zladené s tými obalovými, akurát o nich vieme ešte menej.

Aj na druhej strane škály, väčšej ako obaly jednotlivých atómov, vo svete chemických ("obalových") interakcií, sa vytvárajú štruktúry s ďalšími symetriami, o ktorých nemalo zmysel hovoriť na úrovniach menších ako molekuly. O týchto tiež vieme menej ako tam je.

6 Je celok len sumou častí?

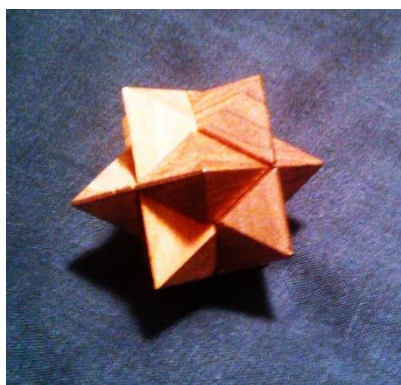
Symetria môže byť charakteristikou určitej rodiny objektov, nie nevyhnutne jednotlivých členov.

Vráťme a ešte k tomu najjednoduchšiemu atómu – vodíku. Bez zachádzania do technických detailov výpočtov pripomeňme, že jeho jediný elektrón sa pohybuje v poli jeho jediného protónu. Pole budené protónom je sféricky symetrické, ako bolo zakódované už v Coulombovom zákone pre klasickú elektrostatickú interakciu. Odkiaľ sa potom berú orbitály vyšších excitovaných stavov elektrónu v poli protónu – ktoré jednotlivo nemusia sférickú symetriu vykazovať?

Táto otázka nás privádza k symetrii vyskytujúcej sa ako charakteristika rodiny objektov (v našom prípade všetkých riešení Schrödingerovej rovnice, resp. k symetrii tejto rovnice samotnej), nie nevyhnutne jednotlivých členov (tu: jednotlivých riešení). Rodina všetkých možných orbitálov dohromady vykazuje aj symetrie, ktoré sa jednotlivým členom pripísať nedajú. Kvantové orbitály sú vec nebezpečná na vizuálne interpretácie, ale tu sa môžeme odkázať na fakt, že aj Newtonovská gravitačná interakcia vykazovala podobný jav. Intenzita gravitačného poľa, povedzme Slnka, je sféricky symetrická – ale poloha planéty v každom jednotlivom čase vyberá význačný smer od Slnka, teda narúša symetriu. Podstatné je, že celá orbita už isté symetrie má, a súbor všetkých možných orbít (aj keď touto planétou nezrealizovaných) má symetrie ako zákon, ktorým sa riadia.



Obr. 7. Lupene, orbitály, riešenia



Obr. 8. Kvet, atóm, rovnica

Vezmime ešte názornejšiu situáciu: jednotlivé lupienky sedmokrásky nemajú symetriu, ktorú vykazuje ich rodina – celý kvet. Týmto sa pridáva ďalší argument pre jav "emergencie" spomínaný v predošlých odsekoch. Vyzerá to tak, že vlastností celku ťažko všetky vysvetliť iba na základe vlastností častí. Minimálne nie v zmysle takých častí a takých vlastností, s akými tu narábame. Otázka, či existuje nejaký zmysel, v ktorom spomenutý redukcionizmus (redukujúci celok na sumu častí) funguje, ide ďaleko za rámec tohto textu a pojmu symetrie.

Totíže môže byť jeden základný princíp za všetkým, ale nevyzerá to tak, že by sa skúmaním jednotlivostí ako častice, interakcie a pod. dal celý preskúmať. Či sa dá preskúmať skúmaním celku je ťažko povedať, kým si neujasníme, čo všetko do celku patrí.

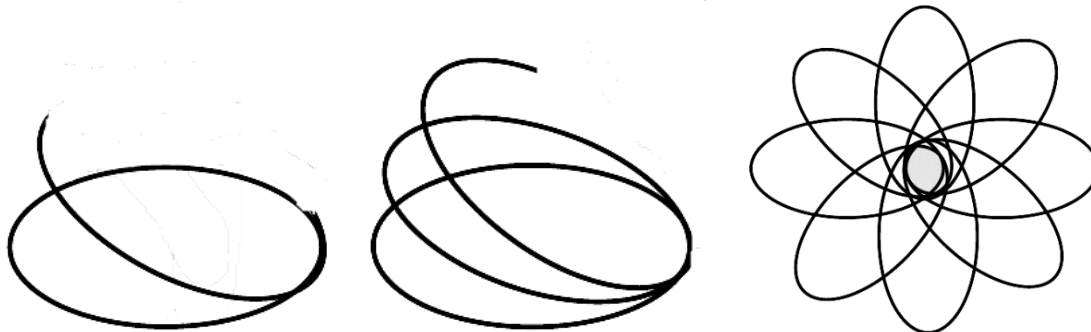
7 Objav či predpoklad symetrie?

Povedali sme si, že mnoho objektov a javov v prírode vykazuje isté pravidelnosti. Nie všetky vidíme a rozoznávame na prvý pohľad. Pri štúdiu prírodných úkazov a našich pokusoch popisovať ich matematickými modelmi nastávajú rozličné situácie:

- **Objav** (symetria a posteriori): Začínáme s istým modelom a symetria je rozpoznaná ako jeho črta. Napríklad, ak máme nejakú rovnicu, povedzme empiricky získanú, a rozpoznáme, že má nejaké symetrie, potom sa nám na ich základe ponúkajú rozličné triky na jej riešenie. Prepis do "vhodne zvolených" súradníc je len jedným z nich.
- **Predpoklad** (symetria a priori): Začínáme s predpokladom, že skúmaný jav vykazuje nejakú konkrétnu symetriu a matematický model budujeme s týmto predpokladom. Napríklad model pre Maxwellovo rozdelenie rýchlostí molekúl, Lagranžian pre štandardný model časticovej fyziky, Schwarzschildova alebo „kozmozologická“ metrika boli navrhnuté s ohľadom na predpokladané symetrie systémov, ktoré popisujú.
- Kombinácia vyššie uvedeného. Spomeňme si na symbolické obrázky drevenej skladačky vyššie. Jednotlivé kúsky majú isté osové symetrie; ak máme všetky poruke a ak ich poskladáme správne, výsledná hviezdica má ešte ďalšie symetrie, o ktorých nemohla byť reč na úrovni jednotlivých častí. Vo fyzike sme často v situácii, keď nám nie je ani jasné, čo všetko vôbec patrí do abstraktnej "skladačky", teda či máme všetky dieliky v rukách, ani akú symetriu má vykazovať výsledný systém. Postupujeme metódou pozri-skús-oprav hľadaj (ďalšie dieliky) – hádaj (ďalšie symetrie, ktoré zatiaľ nevidno) a nepredstieraj, že si už videl všetko.

8 Nerobiť závery pred koncom

Pri hľadaní pravidelností v prírode sa často používa estetické hľadisko. Spomeňme si v tejto súvislosti na dávny príbeh, keď sa objavil Keplerov model slnečnej sústavy. Predpokladali sa kruhové orbity a súvislosť s "hudbou sfér", v ktorých by ležali. Kruhové orbity sa považovali za mimoriadne krásne a dokonalé. Teda, ak už krivka má mať krivosť, tak všade rovnakú. Poniectori azda privítali elipsy s akýmsi rozčarováním. A to ešte nie celkom uzavreté elipsy, vzhľadom na pozorované stáčanie perihélia!



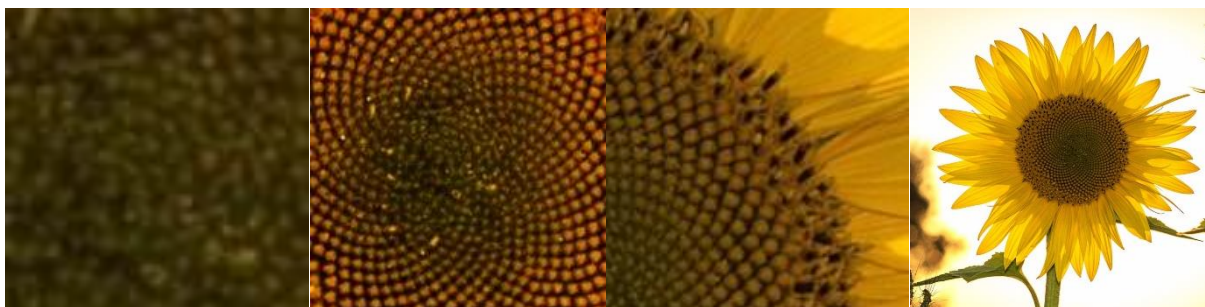
Obr. 9. Vykreslený slnečno-planetárny kvietok nie je menej pekný ako mnohokrát obehnutá kružnica

Eliptickosť a neuzavretosť orbít by však asi nepovažovali za estetickú chybu ani ľudia s veľmi tvrdohlavými a konvenčnými predstavami o tom, čo je pekné, ak by sa na pohyb planéty pozerali dostatočne dlho a z dostatočného nadhľadu.

Ak zvážime ešte širšie hľadisko (a väčší nadhľad), pripomenieme si relativitu a súvis gravitácie a geometrie, prideme k tvrdeniu, že planéta vlastne ide rovno v rámci časopriestoru.

Nejdeme tvrdiť, že všeobecná relativita je už posledné slovo vo fyzike, veľmi pravdepodobne nie. Fyzika je mladá veda a zdanie, že je pokročilá, je relatívne. Ale už sa pestuje dosť dlho na to, aby nám aj ona poskytla pár náznakov, že ak sa nám niečo v prírode javí ako "nie také pekné ako by mohlo byť", je to pravdepodobne preto, že buď máme mizerný vkus, alebo sme ešte nevideli celý obraz.

Predstavme si lienku v strede kvetu slnečnice, ako skúma systém okolo seba. V najbližšom okolí niekoľkých milimetrov vidí čosi ako na prvom obrázku nižšie. Je tu istá periodicita, azda trochu rotačnej symetrie jednotlivých zrníek. Keď sa jej podarí preskúmať trochu viac, povedzme tak 5-7 cm okolo stredu, objaví krásne špirály a azda Fibonacciho postupnosť s nimi spojenú. Možno už začne robiť ich extrapolácie a má pripravené predpovede, aké veľké zrnká akých tvarov očakávať vo vzdialenosti povedzme dva metre od stredu. Vyberie sa teda sebavedome pozdĺž jednej zo špirál overiť svoje predpovede ... a narazí na akúsi štruktúru novej farby aj textúry – a predpokladá, že svet predsa len nie je taký "pekne usporiadaný", ako sa zdalo. Keď však odstúpi do vzdialenosti tých zmienených dvoch metrov, azda v inom smere ako plánovala, vidí novú symetriu, o ktorej predtým nevedela nič.



Obr. 10. A čo ešte keď uvidí celé pole ...

Toto podobenstvo stále operuje s vizuálnymi symetriami. Avšak do "nadhľadu, z ktorého vidno viac", spadá nielen doslovné odstúpenie pár krokov, ale aj celkový posun uvažovania, azda k iným pojmom ako máme zaužívané. Toto platí pre mnoho spôsobov poznávania. Vo fyzike sa takým nadhľadom môže ukázať skúmanie situácie vo fázovom priestore namiesto konfiguračného; v zakrivenom časopriestore namiesto euklidovského priestoru; zahrnutie viacerých komponentov do systému namiesto ich umelého vynechávania ak bytostne patria k sebe, atď. Niekedy to chce geniálne jednoduchý nápad, a potom často ovládanie matematického aparátu, ktorý by pomohol previesť kvalitatívny nápad na kvantitatívne overiteľné predpovede.

A občas znalosť matematického aparátu môže inšpirovať aj ku kvalitatívnym nápadom.

9 Matematický arzenál

Spomenuli sme matematický aparát na uchopenie symetrií vo fyzike. Vzhľadom na to, ako veľmi sa ich skúmanie osvedčilo ako zdroj nových poznatkov, aj príslušný aparát bol aktívne rozvíjaný ([1], [2]). Spomeňme tu aspoň kľúčové slová, s ktorými sa čitateľ môže vydať na prieskum matematických a fyzikálnych oblastí za účelom štúdia symetrií.

Transformácie – tu obvykle značia prechod od jedného objektu k inému. Napríklad od sady karteziánskych súradníc k sade sférických, alebo od jedného atómového orbitálu k inému, alebo od jedného stavu systému k inému (časový vývoj je teda tiež transformáciou). Ak tieto niečo zachovávajú (teda napriek tomu že transformácia na systéme bola prevedená, niečo ostalo ako bolo predtým), hovoríme o nich, že sú (z hľadiska zachovaného aspektu) symetriami.

Invarianty – sú práve veci, vlastnosti, objekty, aspekty zachovávajúce sa pri transformáciách. Dost' často je takou transformáciou práve časový vývoj a invariantom veličina nemeniaca sa v čase, konštanta počas vývoja. Význam zákonov zachovania vo fyzike ťažko vôbec doceniť niekto, kto ešte neriešil do detailov vývoj nejakého reálneho dynamického systému. Doriešenie problému môže závisieť od toho, či si človek všimne, že nejaká kombinácia nezávislých závislých premenných a ich derivácií je maskovaná konštanta. Uved'me niekoľko známych zákonov zachovania z fyziky v súvislosti so symetriami, ktoré ich platnosť podmieňujú: zachovanie energie (za predpokladu homogenity času; tvar fyzikálneho zákona popisujúceho systém nezávisí explicitne od času), zachovanie hybnosti (za predpokladu homogenity priestoru, v ktorom sa systém pohybuje), zachovanie momentu hybnosti (za predpokladu izotropie priestoru okolo systému).

Ekvivalencia – objekty prepojené symetrickou transformáciou sú ekvivalentné vzhľadom na invariant, ktorý transformácia zachováva. Napríklad dva body na sfére sú spojené rotáciou, a z hľadiska vzdialenosti od stredu (invariant pri rotácii) sú ekvivalentné. Alebo: dve inerciálne vzťažné sústavy spojené Lorentzovou transformáciou sú ekvivalentné z hľadiska rýchlosti svetla – v oboch je rovnaká.

Grupy – boli zavedené pri skúmaní symetrií algebraických rovníc, ale ich využitie je teraz omnoho širšie. Ak sa niekde vyskytuje sada transformácií, ktoré sú symetriami nejakého systému (teda pri prechode od jedného jeho stavu k inému niečo zachovávajú, nemenia), obvykle sa dajú reprezentovať ako grupa. Napríklad rotácie tvoria grupu symetrií sféry.

Lieove algebry – súvisia s grupami spojitých transformácií (napríklad rotácie v euklidovskom priestore) a faktom, že spojitie transformácie sa často dajú spraviť "po troche", teda ako zloženie mnohých malých. Malé transformácie majú výhodu v tom, že fungujú lineárne, čo by mal doceniť každý, kto sa už potrápil s aspoň kvadratickou rovnicou.

Killingove vektory – generátory symetrií na hladkých varietach. Hladké variety môžu reprezentovať spojitú množinu stavov systému, krivky v nich postupnosť stavov, teda vývoj. Symetrie zakódované v Killingových vektoroch veľmi uľahčujú predpovede vývoja.

Jetový priestor – je spôsob ako symetriu diferenciálnej rovnice poňať geometricky. Diferenciálne rovnice sú už klasickou súčasťou mnohých odvetví, a nepoznáme univerzálny algoritmus ako ich riešiť. Poznáme také algoritmy pre niektoré typy, a často sú to typy vyznačujúce sa istými symetriami. Práve abstraktný jetový priestor pomáha s geometrickou,

často doslova vizuálnou predstavou abstraktnej rovnice. Na neznámu funkciu vystupujúcu v diferenciálnej rovnici a jej derivácie sa pozeráme ako na súradnice jetového priestoru, a samotná rovnica nám potom reprezentuje nejakú (nad)plochu v ňom. (Nad)plochy sú geometrické objekty, a na ich skúmanie sa potom dajú nasadiť geometrické triky, ktorých je (aj vďaka vizuálnej názornosti v nižších rozmeroch a ich analógiám vo vyšších) pomerne hojne.

Klasifikácia, hierarchia, degenerácia, štruktúra spektier ... – tieto výrazy sa vyskytujú vo viacerých oblastiach fyziky a málokedy (ak vôbec) bez veľmi úzkeho súvisu so symetriami.

10 Notorické neznačí porozumené. Symetria za integračnou konštantou

Práve pre veľmi rozsiahle uplatnenie symetrií v matematike je aj zodpovedajúci aparát veľmi rozmanitý a ťažko niečo spomenúť bez vynechania mnohých aspektov, ktoré by si zaslúžili v danej súvislosti zmienku. Na ilustráciu teda uveďme notoricky známe prípady, s ktorými sú študenti oboznamovaní hneď ako sa naučia riešiť neurčité integrály – hoci často bez toho, aby sa symetria zdôraznila (tento prístup je napravený napríklad v [3]).

Koľko školských písomiek už bolo pokazených "zabudnutím integračnej konštanty"! Namiesto "zámienky na nižšie bodové hodnotenie", ako to niektorí azda vnímajú, však ide o príznak symetrie istého typu diferenciálnych rovníc – jeden z tých príznakov, ktoré kedysi slúžili Sophusovi Lieovi ako podnet na skúmanie a vývoj aparátu dnes známeho ako teória grúp pomenovaných po ňom. Sophus Lie skúmal vlastnosti diferenciálnych rovníc. Analytické skúmanie vlastností zahŕňa štúdium istých pravidelností – a to je v podstate iné slovo pre symetrie.

Pozrime sa, ako sa symetria črtá v spomínanej súvislosti. Riešenie integrálu typu $y(x) = \int f(x) dx$ (ktorého súčasťou je "nezabudnúť integračnú konštantu") môžeme vnímať ako záverečný krok riešenia diferenciálnej rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1)$$

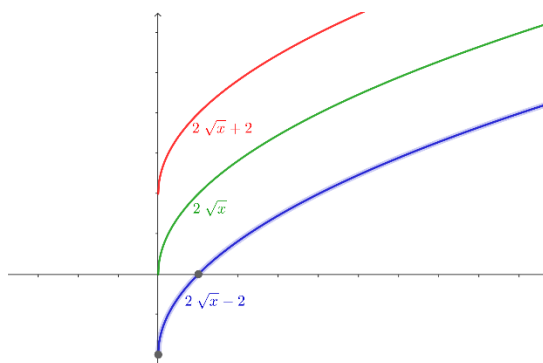
Akú symetriu má táto rovnica? Čo je tu transformáciou zodpovedajúcou danej symetrii? Teda akú operáciu môžeme previesť tak, aby sme niečo charakteristické nezmenili? A čo je tá charakteristická vec, ktorú máme zachovať? Typicky keď riešime rovnicu, môžeme ju prepisovať na iné tvary, z ktorých vidno riešenie o niečo ľahšie ako z predchádzajúcich, ale množina riešení by mala byť pre všetky tieto tvary rovnice rovnaká. Teda zachovať by sme mali rodinu riešení. Pre lepšiu geometrickú predstavu reprezentujme riešenie ako graf – krivku $y(x)$. Naša rovnica (1) nám vlastne hovorí, že sklon tejto krivky ($\frac{dy}{dx}$) závisí len od x , nie od y .

Teda graf môžeme presúvať v rovine v smere osi y – získavame tak nové a nové krivky, líšiace sa konštantou (to je tá notorická spomenutá vyššie), ale všetky sú grafmi riešení našej rovnice.

Vezmime si pre ilustráciu konkrétny príklad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Riešenia sú $y(x) = 2\sqrt{x} + c$, kde c označuje ľubovoľnú konštantu. Výmena jednej takejto konštanty za inú efektívne znamená prechod od grafu jedného riešenia na graf iného – tiež riešenia.



Obr. 11. Niekoľko riešení rovnice $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

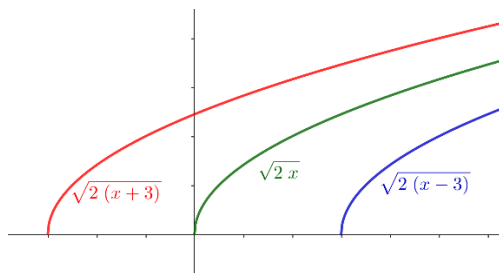
K rovnici (1) sme sa dostali zdanlivo ako k vedľajšiemu objektu od zmienky o integračných konštantách. Akoby sme symetriu (zmena konštanty, posun v smere osi y) poznali vopred a skúmali, ktorý objekt ju má (diferenciálna rovnica istého typu). Teraz sa však priam ponúka nápad ísť naopak. Mohlo by sa jednať o nejakú symetriu a následne návod: ako z jedného riešenia vyrábať iné, keby na pravej strane našej jednoduchšej diferenciálnej rovnice bola len nejaká funkcia $g(y)$?

$$\frac{dy}{dx} = g(y). \quad (2)$$

Teraz nám rovnica hovorí, že krivka $y(x)$ predstavujúca riešenie má sklon nezávislý od posunu v smere osi x . Teda ak máme jedno riešenie a jemu zodpovedajúci graf, potom posunom tohto grafu pozdĺž osi x (to je tu symetrická transformácia) dostávame krivky zodpovedajúce ďalším riešeniam. Vezmime opäť konkrétny príklad rovnice typu (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}.$$

Riešenia sú $y(x) = \sqrt{2(x+c)}$, kde c označuje ľubovoľnú konštantu. Výmena jednej takejto konštanty za inú efektívne znamená prechod od grafu jedného riešenia na graf iného – tiež riešenia.



Obr. 12. Niekoľko riešení rovnice $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

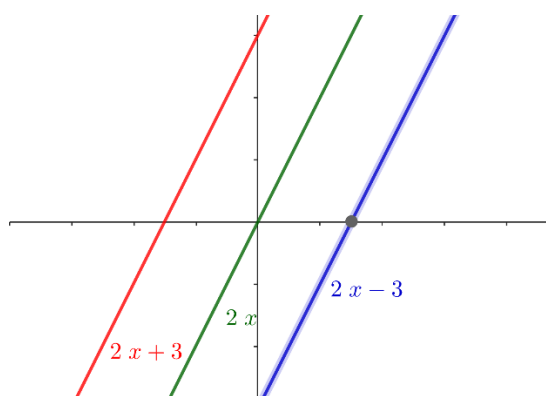
Vyskúšajme si ešte prirodzene sa ponúkajúci typ rovnice, keď hľadaná krivka $y(x)$ predstavujúca riešenie má sklon nezávislý od posunu v smere oboch osí:

$$\frac{dy}{dx} = k, \quad (3)$$

kde k je konštanta. Teda ak máme jedno riešenie a jemu zodpovedajúci graf, potom posunmi tohto grafu pozdĺž osi x alebo y dostávame krivky zodpovedajúce ďalším riešeniam. Vezmime opäť konkrétny príklad rovnice typu (3)

$$\frac{dy}{dx} = 2.$$

Riešenia sú priamky $y(x) = 2x + c$, kde c označuje ľubovoľnú konštantu. Všimnime si, že teraz môžeme grafy jednotlivých riešení vnímať ako poposúvanie jedného riešenia v smere osi x , alebo v smere osi y .



Obr. 13. Niekoľko riešení rovnice $\frac{dy}{dx} = 2$

Zhrňme si naše pozorovania:

- Ak sklon hľadanej funkcie $y(x)$ je len funkciou x (teda $\frac{dy}{dx} = f(x)$) a nezávisí od y , potom posun grafu jedného riešenia v smere y nám vyrobí grafy ďalších riešení.
- Ak sklon hľadanej funkcie $y(x)$ je len funkciou y (teda $\frac{dy}{dx} = g(y)$) a nezávisí od x , potom posun grafu jedného riešenia v smere x nám vyrobí grafy ďalších riešení.
- Ak sklon hľadanej funkcie $y(x)$ nezávisí od x ani y (teda $\frac{dy}{dx} = \text{konst.}$), potom posun grafu jedného riešenia v smere x alebo y nám vyrobí grafy ďalších riešení.

Všimnime si význačný symptóm symetrie – istá voľnosť v situácii. Niečo môže byť zmenené bez zmeny niečoho iného. Na niečom nezáleží (je to len relatívne relevantná črta) ohľadne niečoho, na čom záleží (absolútna črta). (Vo vyššie uvedených príkladoch nezáležalo trebárs na rôznych posunoch, a záležalo na splnení rovnice.) Tieto jednoduché príklady sú len ukázkami omnoho širšieho javu. Z jedného riešenia a znalosti symetrie sa dajú skonštruovať ďalšie. Symetria môže byť vo všeobecnosti menej názorná ako "posúvanie grafu" v karteziánskej

sústave, a jej rozpoznanie môže vyžadovať veľa dôvtipu a skúseností (ktoré ale často pomáhajú prepísať problém tak, aby sa znovu jednalo o "posun grafu" v nejakých súradniciach). Vyššie uvedené príklady však môžu slúžiť ako možnosť sa so symetriou zoznámiť – aj keď je to pri príležitosti, kde práve jednoduchosť situácie zvädza k povrchnému pohľadu a ignorovaniu hlbších princípov. Cesta vpred v mnohých vedách však vedie práve cez objavenú jednoduchosť.

11 Symetria spoločnej agendy

Bolo by absurdné pokúšať sa v rámci takéhoto prehľadového textu do detailov vysvetľovať súvislosti všetkých pojmov, ktoré súvisia so symetriou. Ale bolo azda namieste zmieniť aspoň niektoré; ak sa s nimi čitateľ stretne, nech si spomenie, že pomáhajú vo vede využívať symetriu podobne, ako to znalosť rytmu, rýmov, refrénov a pod. umožňuje umelcom v poézii a hudbe. A možno potom pouvažovať, či nie je nejaká symetria medzi týmito oblasťami ľudského snaženia – či všetky napriek rozličným odlišnostiam a transformáciám nemajú mať spoločné niečo dôležité. Napríklad Cieľ.

Tento článok získal financovanie z výskumného a inovačného programu EU Horizon 2020 v rámci Marie Skłodowska-Curie Dohody o grante č. 945478.

Literatúra

- [1] OLVER, P. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1993. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107.
- [2] OLVER, P. *Equivalence, Invariants, and Symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [3] STARRETT, J. *Solving Differential Equations by Symmetry Groups*. The American Mathematical Monthly, 2007. DOI: 10.1080/00029890.2007.11920470. 114:9, 778-792.

Ilustrácie: pixabay.com, pexels.com, sciencenotes.org, geogebra.org, archív autorky

Mgr. Veronika Gáliková, PhD.

Strojnícka fakulta, STU v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: veronika.galikova@stuba.sk

Jednodílný rotační hyperboloid

Nalezení parametrizace a vytvoření vizualizace v programu Maple

Alice Králová

Abstrakt

V článku jsou odvozeny parametrické rovnice jednodílného rotačního hyperboloidu. Ty jsou dále použity pro vytvoření vizualizace této plochy v programu Maple.

Klíčová slova: jednodílný rotační hyperboloid, zborcená plocha, parametrické rovnice, Maple

Abstract

In this article, we present derivation of parametric equations of a one-sheet rotational hyperboloid. Using these equations it is possible to create a graphical representation of this surface in the Maple program.

Keywords: circular hyperboloid of one sheet, warped surface, parametric equations, Maple

1 Úvod

V tomto článku odvodíme tvar parametrických rovnic jednodílného rotačního hyperboloidu, které následně využijeme pro vytvoření vizualizace této plochy v programu Maple. Některé z uvedených postupů by bylo možné modifikovat na další plochy technické praxe.

2 Definice a vlastnosti jednodílného rotačního hyperboloidu

Jednodílný rotační hyperboloid patří mezi *zborcené kvadriky*. Jedná se o přímkovou plochu 2. stupně. Základní definice říká, že je tvořen množinou všech přímek, které protínají zadané tři vlastní (řídící) mimoběžky, které nejsou rovnoběžné s žádnou rovinou. Termín *zborcená přímková plocha* označuje vlastnost, že v navzájem různých bodech obecné tvořící přímky jsou tečné roviny plochy také navzájem různé. Důsledkem toho je, že takovouto plochu nelze rozvinout do roviny.

Jednodílný rotační hyperboloid je zároveň *rotační plochou*, kdy kolem osy rotuje

- hyperbola, přičemž osa rotace je její vedlejší osou,
- přímka, která je s osou rotace mimoběžná a není k ní kolmá.

Nyní už víme, co se stane, pokud kolem osy rotuje přímka, která s ní není totožná. Rotací vznikne

- rotační válcová plocha, pokud je přímka s osou rovnoběžná,
- rotační kuželová plocha, pokud je přímka s osou různoběžná a není k ní kolmá,

- jednoduchý rotační hyperboloid, pokud je přímka s osou mimoběžná a není k ní kolmá,
- celá rovina, případně rovina bez kruhové oblasti, pokud je přímka k ose kolmá.

Budeme uvažovat zadání jednoduchého rotačního hyperboloidu jako plochy, která vznikne rotací úsečky AB kolem osy z . Bod A zvolme v půdorysně tak, že bude ležet na ose 1. kvadrantu, takže je $A[a; a; 0]$, kde $a > 0$. Bod B nechť leží ve výšce $v > 0$, přičemž jeho půdorys B_1 umístíme symetricky podle osy x na osu 4. kvadrantu. To znamená, že $B[a; -a; v]$. Plocha je pak omezena kružnicemi ve vodorovných rovinách $z = 0$ a $z = v$, po nichž se body A a B pohybují. Obě kružnice mají stejný poloměr $a\sqrt{2}$, který je v půdorysně daný vzdáleností bodu A resp. bodu B_1 od počátku souřadnicového systému $O[0; 0; 0]$.

Bod na úsečce AB , který je ose z nejbližší, vytváří svojí rotací *hrdelní kružnici* s nejmenším poloměrem. Jedná se o bod $H[a; 0; v/2]$, takže poloměr hrdelní kružnice je roven hodnotě a .

Poloha obecného bodu X na úsečce AB je dána vztahem

$$X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ kde } t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Protože vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (0; -2a; v)$, je bod $X[a; a - 2at; vt]$.

Poloměr kružnice, po níž bod X rotuje, je dán jeho vzdáleností od osy rotace z , kterou najdeme jako vzdálenost jeho půdorysu $X_1[a; a - 2at; 0]$ od počátku O .

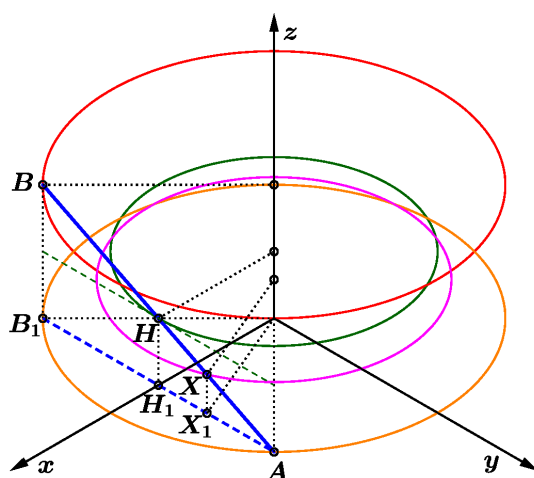
$$\overrightarrow{OX_1} = (a; a - 2at; 0),$$

$$r = \|\overrightarrow{OX_1}\| = \sqrt{a^2 + (a - 2at)^2 + 0} = 2a\sqrt{t^2 - t + 0,5}.$$

Uvažujme bod Y , který vznikne pootočením bodu X o obecný úhel φ ve vodorovné rovině. Jeho poloha je pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$ dána vztahy

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = v \cdot t,$$

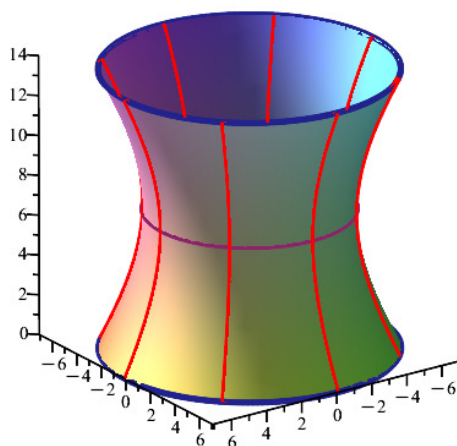
které vyjadřují hledanou parametrizaci odpovídající části plochy rotačního hyperboloidu.



Obr. 1. Zadání jednoduchého rotačního hyperboloidu

3 Zobrazení jednodílného rotačního hyperboloidu v Maplu

Zobrazení rotačního hyperboloidu v Maplu je dáno jeho parametrickými rovnicemi. Jestliže do této parametrizace dosadíme konkrétní hodnotu úhlu φ , získáme jednu větev hyperboly, jejíž rotací by hyperboloid rovněž mohl vzniknout. Abychom zadání jednotlivých potočených poloh větve hyperboly nemuseli vypisovat ručně, použijeme v zápisu cyklus `for`. V programu Maple tedy máme následující posloupnost příkazů, které generují obraz hyperboloidu, přičemž jsme zvolili hodnoty $a = 5$ a $v = 14$.



Obr. 2. Zobrazení jednodílného rotačního hyperboloidu v Maplu

```
> restart:with(plots):
> b1:=color=navy:b2:=color=maroon:b3:=color=red:b4:=color=brown:
  t1:=thickness=5:
> a:=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> RH:=plot3d([r*cos(phi), r*sin(phi), v*t], t=0..1, phi=0..2*Pi,
  style=patchnogrid):
> k_A:=spacecurve([a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), 0], phi=0..2*Pi,
  b1, t1):
> k_B:=spacecurve([a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), v], phi=0..2*Pi,
  b1, t1):
> k_H:=spacecurve([a*cos(phi), a*sin(phi), v/2], phi=0..2*Pi, b2, t1):
> for i from 0 by 1 to 7 do H(i):=spacecurve([r*cos(i*Pi/4), r*sin(i*Pi/4), v*t],
  t=0..1, b3, t1) end do:
> display(RH, k_A, k_B, k_H, H(0), H(1), H(2), H(3), H(4), H(5), H(6), H(7), axes=framed,
  scaling=constrained);
```

Pokud bychom chtěli na hyperboloidu zobrazit úsečku AB , použijeme k tomu odvozené souřadnice bodu X , který na ní leží. Jestliže úsečku AB následně otočíme kolem osy rotace z o libovolně zvolený úhel, bude tato úsečka rovněž částí plochy, a takto vytvořené vzájemně mimoběžné úsečky budou na ploše generovat 1. přímkový regulus.

Pokud body A a B otočíme o úhel $\frac{\pi}{4}$ kolem osy z , získáme body ${}^1A[0; a\sqrt{2}; 0]$ a ${}^1B[a\sqrt{2}; 0; v]$. Pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$${}^1X = {}^1A + t \cdot ({}^1B - {}^1A) = [a\sqrt{2}t; a\sqrt{2} - a\sqrt{2}t; vt]$$

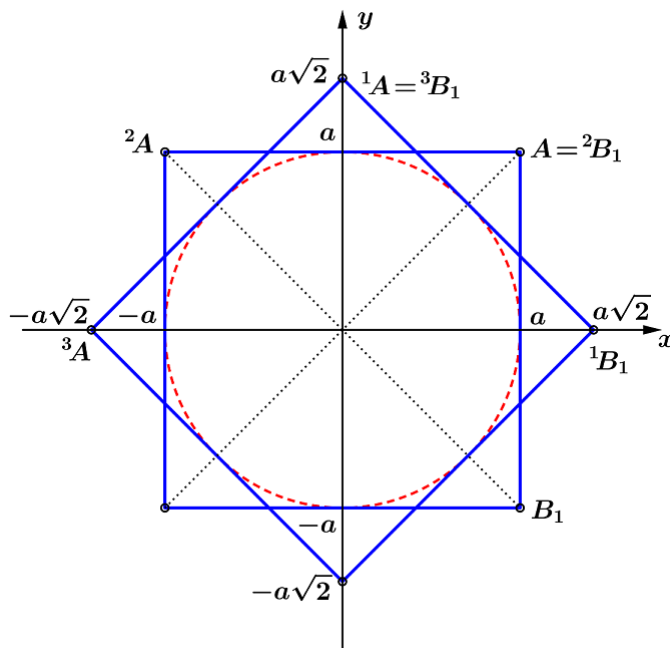
parametrizace potočené úsečky ${}^1A{}^1B$.

Podobně při otočení úsečky AB o úhel $\frac{\pi}{2}$ získáme body ${}^2A[-a; a; 0]$ a ${}^2B[a; a; v]$ a pak je ${}^2X = [-a + 2at; a; vt]$.

V těchto výpočtech bychom mohli pokračovat a do programu Maple zapsat příkazy

```
> a:=5:v:=14:
> AB:=spacecurve([a,a-2*a*t,v*t],t=0..1,b4,t1):
> AB_r1:=spacecurve([a*sqrt(2)*t,a*sqrt(2)*(1-t),v*t],t=0..1,b4,t1):
> AB_r2:=spacecurve([-a+2*a*t,a,v*t],t=0..1,b4,t1):
```

Označení jednotlivých úseček bychom pak vložili do příkazu `display`.



Obr. 3. Otočené polohy úsečky AB v půdorysu

Místo tohoto zlouhavého postupu, kterým navíc snadno získáme pouze pootočené polohy úsečky AB pro celočíselné násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$, necháme pracovat Maple.

Parametrizaci bodu 1X případně 2X získáme tím, že sloupcový vektor tvořený x -ovou a y -ovou souřadnicí bodu X vynásobíme maticí otočení, jejíž tvar je

$$R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \varphi = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Souřadnice z se při otáčení nemění. V Maplu zadáme příkazy

```
> restart:with(Student[LinearAlgebra]):
> X:=[a,a-2*a*t];
```

$$X := \begin{bmatrix} a \\ -2at + a \end{bmatrix}$$

```
> R:=RotationMatrix(Pi/4);
```

$$R := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> X1:=simplify(R.X);
```

$$X1 := \begin{bmatrix} \sqrt{2}at \\ -\sqrt{2}a(t-1) \end{bmatrix}$$

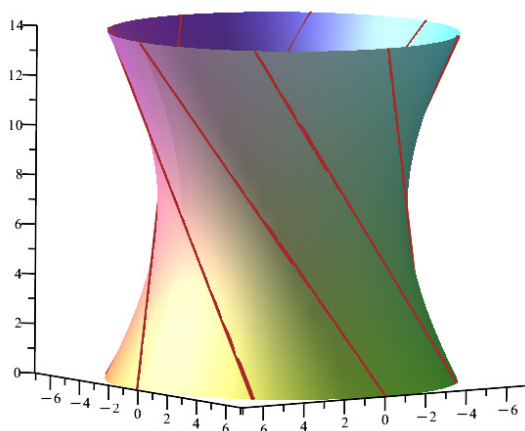
```
> with(plots):b1:=color=brown:tl:=thickness=4:
> a:=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> RH:=plot3d([r*cos(phi),r*sin(phi),v*t],t=0..1,phi=0..2*Pi,
  style=patchnogrid):
> AB:=spacecurve([a,a-2*a*t,v*t],t=0..1,b1,tl):
> AB_r1:=spacecurve([X1[1],X1[2],v*t],t=0..1,b1,tl):
> AB_r2:=spacecurve([(RotationMatrix(Pi/2).X)[1],(RotationMatrix(Pi/2).X)[2],
  v*t],t=0..1,b1,tl):
```

Tvar posledního příkazu pro otočenou polohu úsečky AB o úhel $\frac{\pi}{2}$ bychom v modifikované verzi použili pro další přirozené násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$. Označení všech poloh úsečky AB bychom následně vložili do příkazu `display`.

```
> display(RH,AB,AB_r1,AB_r2,AB_r3,AB_r4,AB_r5,AB_r6,AB_r7,
  axes=framed,scaling=constrained);
```

Opět platí, že příkazy pro zadání otočených poloh úsečky AB není třeba vypisovat jednotlivě, pokud pro jejich zadání použijeme cyklus `for`. Pro zvolené hodnoty $a = 5$ a $v = 14$ získáme otočené polohy úsečky AB pojmenované $AB_r(1)$ až $AB_r(7)$ jediným příkazem

```
> for k from 1 by 1 to 7 do AB_r(k):=spacecurve([(RotationMatrix(k*Pi/4).X)[1],
  (RotationMatrix(k*Pi/4).X)[2],v*t],t=0..1,b1,tl) end do:
```



Obr. 4. Přímký 1. regulu na rotačním hyperboloidu

Užití matice otočení nám umožňuje snadno zobrazit přímku 1. regulu v poloze dané libovolně zvoleným úhlem φ .

Pokud bychom chtěli vytvořit animaci, v níž se přímky 1. regulu pohybují po ploše, je třeba obecný tvar matice otočení R_φ vynásobit se sloupcovým vektorem obsahujícím souřadnice x a y bodu X . Tím získáme vektor

$$(a \cos \varphi - a \sin \varphi + 2a t \sin \varphi; a \sin \varphi + a \cos \varphi - 2a t \cos \varphi)^T.$$

Souřadnice z je rovna součinu $v \cdot t$. V animaci nahradíme úhel φ posuvníkem pos , který se mění od 0 po 2π . Při pohybu můžeme vykreslovanou úsečku zachytit v několika polohách vložení parametru trace .

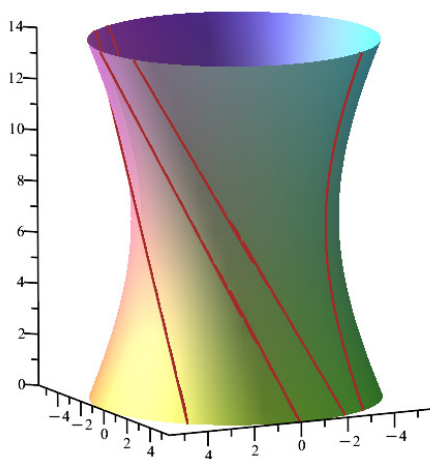
Současně je možné na ploše zobrazit pohyb hyperboly, jejímž otáčením kolem osy rotace z plocha vzniká. V parametrizaci hyperboloidu

$$(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi; v \cdot t), \text{ kde } r = 2a\sqrt{t^2 - t + 0,5} \text{ a } t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

nahradíme úhel φ dalším posuvníkem $\text{pos}_{1,2}$, který se pro jednu větev hyperboly bude měnit od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ a pro druhou větev hyperboly bude v mezích od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$.

Abychom uvedené intervaly převedli na společný interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, použijeme vztahy

$$\text{pos}_1 = \frac{\text{pos} - \pi}{2} \wedge \text{pos}_2 = \frac{\text{pos} + \pi}{2}.$$



Obr. 5. Pohyb křivek po rotačním hyperboloidu

Posloupnost příkazů je v Maplu následující:

```
> restart:with(plots):
> b1:=color=brown:b2:=color=red:tl:=thickness=4:
> a:=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> RH:=plot3d([r*cos(phi),r*sin(phi),v*t],t=0..1,phi=0..2*Pi,
  style=patchnogrid):
> P:=[a*cos(pos)-a*sin(pos)+2*a*t*sin(pos),
  a*sin(pos)+a*cos(pos)-2*a*t*cos(pos),v*t],t=0..1,b1,tl:
> A:=animate(spacecurve,[P],pos=0..2*Pi,frames=50,trace=8):
> H1:=[r*cos((pos-Pi)/2),r*sin((pos-Pi)/2),v*t],t=0..1,b2,tl:
> A_H1:=animate(spacecurve,[H1],pos=0..2*Pi,frames=50):
```

```
> H2:={ [r*cos((pos+Pi)/2), r*sin((pos+Pi)/2), v*t] }, t=0..1, b2, t1:
> A_H2:=animate(spacecurve, [H2], pos=0..2*Pi, frames=50):
> display(RH, A, A_H1, A_H2, axes=framed, scaling=constrained);
```

4 Animace vzniku rotačního hyperboloidu v Maplu

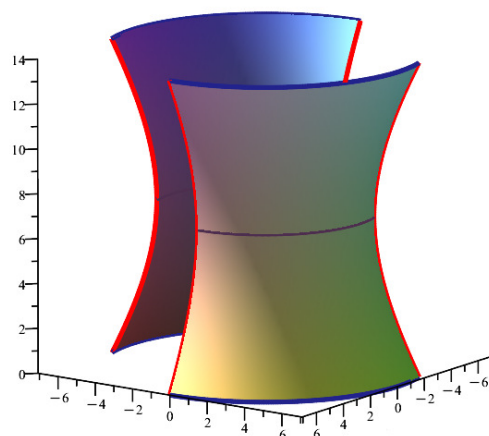
Dalším krokem je vytvoření animací, které ukazují vznik rotačního hyperboloidu buďto rotací hyperboly, nebo rotací úsečky AB , kolem osy z .

Při práci s hyperbolou zobrazíme její větve v_1 a v_2 , které jsou dány hodnotami úhlu $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ v parametrizaci hyperboloidu. Vznikající plocha hyperboloidu sestává z části tvořené pohybem větve v_1 a z části tvořené pohybem větve v_2 . V první části plochy je rozsah úhlu φ omezen od 0 po hodnotu posuvníku pos_1 , který je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Druhá část plochy má úhel φ od π do pos_2 , kde $\text{pos}_2 \in \langle \pi, 2\pi \rangle$. Pro společný posuvník $\text{pos} \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jsou použity převodní vztahy

$$\text{pos}_1 = \frac{\text{pos}}{2} \wedge \text{pos}_2 = \frac{\text{pos} + 2\pi}{2}.$$

Zobrazení plochy ještě vylepšíme znázorněním kružnic ve vodorovných rovinách $z = 0$, $z = v$ a $z = v/2$.

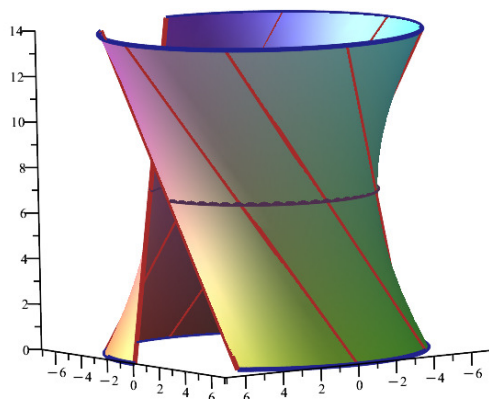
```
> restart:with(plots):
> b1:=color=red:b2:=color=navy:b3:=color=violet:t1:=thickness=5:
> a:=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> v1:=spacecurve([r, 0, v*t], t=0..1, b1, t1):
> v2:=spacecurve([-r, 0, v*t], t=0..1, b1, t1):
> RH1:={ [r*cos(phi), r*sin(phi), v*t] }, t=0..1, phi=0..pos/2, style=patchnogrid:
> A_RH1:=animate(plot3d, [RH1], pos=0..2*Pi, frames=50):
> RH2:={ [r*cos(phi), r*sin(phi), v*t] }, t=0..1, phi=Pi..(pos+2*Pi)/2,
> style=patchnogrid:
> A_RH2:=animate(plot3d, [RH2], pos=0..2*Pi, frames=50):
> H1:={ [r*cos(pos/2), r*sin(pos/2), v*t] }, t=0..1, b1, t1:
> A_H1:=animate(spacecurve, [H1], pos=0..2*Pi, frames=50):
> H2:={ [r*cos((pos+2*Pi)/2), r*sin((pos+2*Pi)/2), v*t] }, t=0..1, b1, t1:
> A_H2:=animate(spacecurve, [H2], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O1_A:={ [a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), 0] }, phi=0..pos/2, b2, t1:
> AnimO1A:=animate(spacecurve, [O1_A], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O2_A:={ [a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), 0] }, phi=Pi..(pos+2*Pi)/2,
> b2, t1:
> AnimO2A:=animate(spacecurve, [O2_A], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O1_B:={ [a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), v] }, phi=0..pos/2, b2, t1:
> AnimO1B:=animate(spacecurve, [O1_B], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O2_B:={ [a*sqrt(2)*cos(phi), a*sqrt(2)*sin(phi), v] }, phi=Pi..(pos+2*Pi)/2,
> b2, t1:
> AnimO2B:=animate(spacecurve, [O2_B], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O1_H:={ [a*cos(phi), a*sin(phi), v/2] }, phi=0..pos/2, b3, t1:
> AnimO1H:=animate(spacecurve, [O1_H], pos=0..2*Pi, frames=50):
> O2_H:={ [a*cos(phi), a*sin(phi), v/2] }, phi=Pi..(pos+2*Pi)/2, b3, t1:
> AnimO2H:=animate(spacecurve, [O2_H], pos=0..2*Pi, frames=50):
> display(A_RH1, A_RH2, A_H1, A_H2, v1, v2, AnimO1A, AnimO2A, AnimO1B, AnimO2B,
> AnimO1H, AnimO2H, axes=framed, scaling=constrained);
```



Obr. 6. Vznik hyperboloidu rotací hyperboly

Pokud chceme zobrazit vznik hyperboloidu rotací úsečky AB kolem osy z , vhodně upravujeme parametrizaci, která definuje její otočené polohy.

```
> restart:with(plots):
> b1:=color=brown:b2:=color=navy:b3:=color=violet:tl:=thickness=5:
> a:=5:v:=14:
> RH:={ [a*cos(phi)-a*sin(phi)+2*a*t*sin(phi),
        a*sin(phi)+a*cos(phi)-2*a*t*cos(phi),v*t] },t=0..1,phi=0..pos,
        style=patchnogrid:
> A_RH:=animate(plot3d,[RH],pos=0..2*Pi,frames=50):
> AB:=spacecurve([a,a-2*a*t,v*t],t=0..1,b1,tl):
> P:={ [a*cos(pos)-a*sin(pos)+2*a*t*sin(pos),
        a*sin(pos)+a*cos(pos)-2*a*t*cos(pos),v*t] },t=0..1,b1,tl:
> A:=animate(spacecurve,[P],pos=0..2*Pi,frames=50,trace=8):
> kA:={ [a*cos(phi)-a*sin(phi),a*sin(phi)+a*cos(phi),0] },phi=0..pos,b2,tl:
> Anim_kA:=animate(spacecurve,[kA],pos=0..2*Pi,frames=50):
> kB:={ [a*cos(phi)+a*sin(phi),a*sin(phi)-a*cos(phi),v] },phi=0..pos,b2,tl:
> Anim_kB:=animate(spacecurve,[kB],pos=0..2*Pi,frames=50):
> kH:={ [a*cos(phi),a*sin(phi),v/2] },phi=0..pos,b3,tl:
> Anim_kH:=animate(spacecurve,[kH],pos=0..2*Pi,frames=50):
> display(AB,A_RH,A,Anim_kA,Anim_kB,Anim_kH,axes=framed,scaling=constrained);
```



Obr. 7. Vznik hyperboloidu rotací úsečky

Doposud jsme na hyperboloidu zobrazovali pouze úsečky náležející 1. přímkovému regulu. Na ploše ovšem existuje i 2. přímkový regulus, jehož přímky jsou opět vzájemně mimoběžné, přičemž libovolné dvě přímky z 1. a 2. regulu jsou spolu různoběžné.

Dále vytvoříme model plochy, který bude připomínat chladičí věž jaderné elektrárny. Protože horní hraniční kružnice ve vodorovné rovině má v tomto případě menší poloměr než dolní hraniční kružnice ve vodorovné rovině, změníme rozsah parametru t na interval od 0 do 0,85.

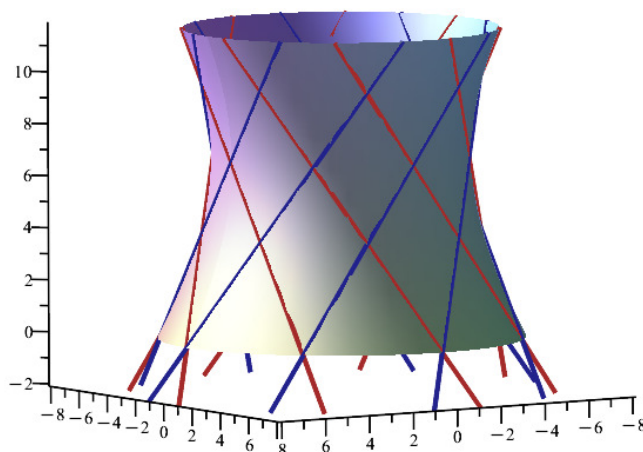
Postup pro zobrazení úseček, které patří 1. přímkovému regulu a jsou otočenou polohou úsečky AB , jsme uvedli výše. Protože plášť chladičí věže nesahá až na zem a jsou pod ním železobetonové podpěry, které geometricky odpovídají tvořícím úsečkám plochy, bude rozsah parametru t pro úsečky 1. regulu od $-0,15$ do $0,85$.

Úsečka CD 2. regulu bude mít bod C totožný s bodem A úsečky AB 1. regulu, přičemž tento bod leží na dolní hraniční kružnici pláště plochy. Půdorysy úseček 2. regulu jsou také tečnami půdorysu hrdelní kružnice plochy, v obr. 3 je $C_1D_1 \equiv {}^2B_1 {}^2A$.

V prostoru je $C[a; a; 0]$ a $D[-a; a; v]$, takže obecný bod $U \in CD$ vyjádříme jako

$$U = C + t \cdot \overrightarrow{CD} = [a - 2at; a; vt].$$

Rozsah parametru t upravíme na $\langle -0,15; 0,85 \rangle$.



Obr. 8. Rotační hyperboloid jako chladičí věž jaderné elektrárny

Další pootočené polohy úsečky CD na ploše získáme vynásobením x -ové a y -ové souřadnice bodu U s maticí otočení R_φ . Souřadnice z zůstává rovna $v \cdot t$. Požadovaný výsledek nám dává posloupnost příkazů

```
> restart:with(Student[LinearAlgebra]):
> X:=<a,a-2*a*t>:
> with(plots):b1:=color=brown:b2:=color=navy:t1:=thickness=4:
> a=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> RH:=plot3d([r*cos(phi),r*sin(phi),v*t],t=0..0.85,phi=0..2*Pi,
  style=patchnogrid):
> AB:=spacecurve([a,a-2*a*t,v*t],t=-0.15..0.85,b1,t1):
> for i from 1 by 1 to 7 do AB_r(i):=spacecurve([(RotationMatrix(i*Pi/4).X)[1],
  (RotationMatrix(i*Pi/4).X)[2],v*t],t=-0.15..0.85,b1,t1) end do:
> CD:=spacecurve([a-2*a*t,a,v*t],t=-0.15..0.85,b2,t1):
```

```
> U:=(a-2*a*t,a):
> for j from 1 by 1 to 7 do CD_r(j):=spacecurve([(RotationMatrix(j*Pi/4).U)[1],
, (RotationMatrix(j*Pi/4).U)[2],v*t],t=-0.15..0.85,b2,t1) end do:
> display(RH,AB,AB_r(1),AB_r(2),AB_r(3),AB_r(4),AB_r(5),AB_r(6),AB_r(7),CD,
CD_r(1),CD_r(2),CD_r(3),CD_r(4),CD_r(5),CD_r(6),CD_r(7),axes=framed,
scaling=constrained);
```

Pro zadaný jednodílný rotační hyperboloid jsme našli parametrizaci ve tvaru

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = v \cdot t, \text{ kde } r = 2a\sqrt{t^2 - t + 0,5}.$$

Úpravou těchto rovnic lze nalézt vyjádření hyperboloidu v implicitním tvaru.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 &= 4a^2 \cdot (t^2 - t + 0,5) = 4a^2 \cdot \left(\frac{z^2}{v^2} - \frac{z}{v} + 0,5 \right) = \\ &= \frac{4a^2}{v^2} \cdot (z^2 - zv + 0,5v^2) = \frac{4a^2}{v^2} \cdot [(z - 0,5v)^2 + 0,25v^2] = \\ &= \frac{4a^2}{v^2} \cdot (z - 0,5v)^2 + a^2. \end{aligned}$$

Tedy

$$x^2 + y^2 - \frac{4a^2}{v^2} \cdot (z - 0,5v)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{(z - 0,5v)^2}{\frac{v^2}{4}} = 1.$$

Asymptoty hyperbol na ploše, které mají vedlejší osu v ose rotace z , vytvářejí *asymptotickou kuželovou plochu*. V rovině $y = 0$ budou této kuželové ploše patřit přímky

$$z = \pm \frac{v}{2a} \cdot x + \frac{v}{2},$$

což je zřejmé z toho, že příslušná hyperbola plochy v rovině (x, z) má střed $[0; \frac{v}{2}]$ a jeden vrchol charakteristického obdélníka má souřadnice $[a; v]$. Tyto přímky jsou řešením jediné rovnice

$$\left(z - \frac{v}{2} \right)^2 = \frac{v^2}{4a^2} \cdot x^2,$$

asymptotická kuželová plocha má tudíž implicitní vyjádření ve tvaru

$$\left(z - \frac{v}{2} \right)^2 = \frac{v^2}{4a^2} \cdot x^2 + \frac{v^2}{4a^2} \cdot y^2 \quad \Rightarrow \quad (2az - av)^2 = v^2 \cdot x^2 + v^2 \cdot y^2.$$

Pro zobrazení hyperboloidu s kuželovou plochou použijeme následující příkazy, v nichž je u definice ploch třeba zadat parametr `grid`, kterým se nastaví hustota sítě, pomocí níž jsou objekty vykreslovány.

```
> restart:with(plots):
> rovH:=(2*a*z/v-a)^2=x^2+y^2-a^2;
```

$$rovH := \left(\frac{2az}{v} - a \right)^2 = -a^2 + x^2 + y^2$$

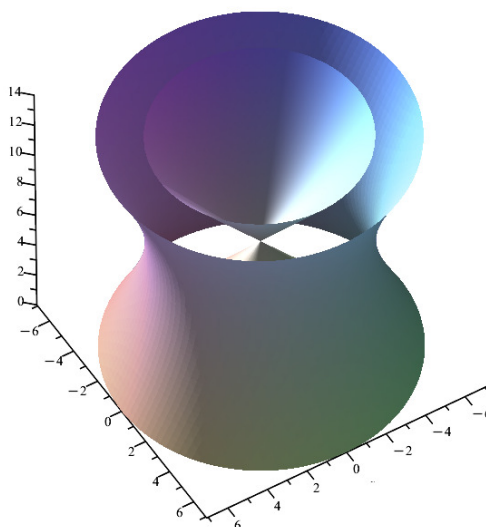
```
> rovK:=(2*a*z-a*v)^2=v^2*x^2+v^2*y^2;
```

$$rovK := (-av + 2az)^2 = v^2x^2 + v^2y^2$$

```

> a:=5:v:=14:
> RH_impl:=implicitplot3d(rovH,x=-a*sqrt(2)..a*sqrt(2),
  y=-a*sqrt(2)..a*sqrt(2),z=0..v,grid=[100,100,100],style=surface):
> K_impl:=implicitplot3d(rovK,x=-a..a,y=-a..a,z=0..v,grid=[100,100,100],
  style=surface):
> display(RH_impl,K_impl,axes=framed,scaling=constrained);

```



Obr. 9. Jednodílný rotační hyperboloid s asymptotickou kuželovou plochou

Poznamenejme, že z implicitní rovnice asymptotické kuželové plochy plyne její parametrizace ve tvaru

$$x = \frac{t \cos \varphi}{v}, \quad y = \frac{t \sin \varphi}{v}, \quad z = \pm \frac{t}{2a} + \frac{v}{2}$$

pro úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a parametr $t \in \langle 0, a \cdot v \rangle$.

Stejný výsledek získáme, jestliže implicitní rovnici zadávající plochu asymptotického dvojkužele nahradíme parametrizacemi příslušných kuželových ploch, v Maplu tedy píšeme

```

> K1:=plot3d([t*cos(phi)/v,t*sin(phi)/v,t/(2*a)+v/2],t=0..a*v,phi=0..2*Pi,
  style=patchngrid):
> K2:=plot3d([t*cos(phi)/v,t*sin(phi)/v,-t/(2*a)+v/2],t=0..a*v,phi=0..2*Pi,
  style=patchngrid):
> display(RH_impl,K1,K2,axes=framed,scaling=constrained);

```

Pro úplnost dodejme, že rovnoběžným posunutím tvořících přímek 1. a 2. regulu hyperboloidu do jeho středu by asymptotická kuželová plocha rovněž vznikla.

Hyperboloid a asymptotická kuželová plocha mají v nevlastní rovině společnou nevlastní regulární kuželosečku, z čehož plyne, že pokud bychom nerozlišovali mezi regulární a singulární kuželosečkou, jsou řezy hyperboloidu a asymptotické kuželové plochy zvolenou rovinou stejného typu. Oba řezy jsou tedy kuželosečkou typu elipsa, parabola nebo hyperbola. Protneme-li například obě plochy rovinou obsahující jejich společnou osu rotace, bude kuželová plocha profata ve dvojici svých různoběžných povrchů a řezem rotačního hyperboloidu bude hyperbola, což znamená, že oba řezy jsou typu hyperbola.

Každým bodem jednodílného rotačního hyperboloidu procházejí dvě různoběžné přímky 1. a 2. regulu, které v tomto bodě určují tečnou rovinu hyperboloidu.

Zadávající úsečku AB , jejíž rotací kolem osy z hyperboloid vznikl, jsme parametrizovali vztahy

$$AB = (a; a - 2at; vt) \text{ pro } t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pro měnící se hodnoty parametru t budeme odpovídajícím bodem $T \in AB$ prokládat přímku 2. regulu, a tím určovat polohy tečných rovin hyperboloidu podél úsečky AB . V půdorysu musí být přímka CD 2. regulu tečnou hrdelní kružnice h s rovnicí

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Tečna této kružnice má pro bod dotyku $\overline{H}$ o souřadnicích $[x_0; y_0]$ rovnici

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = a^2.$$

Souřadnice bodu dotyku $\overline{H}$ prozatím neznáme, ale víme, že na tečně leží bod T úsečky AB , jehož souřadnice do rovnice dosadíme, tedy

$$a \cdot x_0 + (a - 2at) \cdot y_0 = a^2 \Rightarrow x_0 = a - (1 - 2t) \cdot y_0 = a + (2t - 1) \cdot y_0.$$

Protože je bod $\overline{H}$ bodem hrdelní kružnice h , dosazením souřadnice x_0 vznikne kvadratická rovnice pro proměnnou y_0 ve tvaru

$$(a + (2t - 1) \cdot y_0)^2 + y_0^2 = a^2.$$

Rovnici vyřešíme v Maplu zadáním příkazů

```
> Rov:=(a+(2*t-1)*y_0)^2+y_0^2=a^2;
```

$$Rov := (a + (2t - 1)y_0)^2 + y_0^2 = a^2$$

```
> y_0:=solve(Rov,y_0);
```

$$y_0 := 0, -\frac{a(2t-1)}{2t^2-2t+1}$$

```
> x_0:=simplify(a+(2*t-1)*y_0[2]);
```

$$x_0 := -\frac{2at(t-1)}{2t^2-2t+1}$$

Vidíme, že jedna hodnota y_0 je rovna 0, což je y -ová souřadnice bodu H úsečky AB na hrdelní kružnici h . Zajímá nás tedy druhá hodnota y_0 , která určuje y -ovou souřadnici hledaného bodu dotyku $\overline{H} \in h$, který leží na úsečce CD . Dopočítáním x -ové souřadnice jsme určili, že

$$\overline{H} = \left[\frac{a \cdot 2t \cdot (1-t)}{2t^2-2t+1}; \frac{a \cdot (1-2t)}{2t^2-2t+1} \right].$$

Hledaná tečná rovina τ v bodě T rotačního hyperboloidu je určena třemi body T , H a $\overline{H}$, přičemž

$$T = [a; a - 2at; vt], H = \left[a; 0; \frac{v}{2} \right], \overline{H} = \left[\frac{a \cdot 2t \cdot (1-t)}{2t^2-2t+1}; \frac{a \cdot (1-2t)}{2t^2-2t+1}; \frac{v}{2} \right].$$

Rovnici tečné roviny τ určíme na základě nulového determinantu, který bude obsahovat vektory $\overrightarrow{HX}$, $\overrightarrow{HT}$ a $\overrightarrow{HH}$, kde X je obecným bodem roviny.

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z-\frac{v}{2} \\ 0 & a-2at & v \cdot \left(t-\frac{1}{2}\right) \\ -a \cdot \frac{(2t-1)^2}{2t^2-2t+1} & -a \cdot \frac{2t-1}{2t^2-2t+1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

V determinantu jsme prvek p na pozici ve 3. řádku a v 1. sloupci určili v programu Maple a ve výpočtech budeme pokračovat:

```
> p:=simplify(x_0-a);
```

$$p := -\frac{(2t-1)^2 a}{2t^2-2t+1}$$

```
> with(linalg):
```

```
> M:=array(1..3,1..3,[[x-a,y,z-v/2],[0,a-2*a*t,v*(t-1/2)],[p,y_0[2],0]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} x-a & y & z-\frac{v}{2} \\ 0 & -2at+a & v\left(t-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{(2t-1)^2 a}{2t^2-2t+1} & -\frac{a(2t-1)}{2t^2-2t+1} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> tau:=det(M)=0;
```

$$\tau := \frac{(2t-1)^2 a (2atv - 4atz - 2yvt - 2av + 2az + vx + yv)}{2(2t^2-2t+1)} = 0$$

Rovnice roviny τ je tedy

$$2atv - 4atz - 2yvt - 2av + 2az + vx + yv = 0,$$

což upravíme do tvaru

$$x \cdot v + y \cdot v(1-2t) + z \cdot 2a(1-2t) - 2av(1-t) = 0.$$

Najdeme parametrizaci úsečky $\overrightarrow{CD}$, která patří 2. regulu a prochází bodem T . Úsečka CD je určena směrovým vektorem $\overrightarrow{TH}$, jehož souřadnice spočítáme. Souřadnice x je rovna výše uvedené hodnotě p , souřadnici y určíme pomocí Maplu jako hodnotu q , souřadnice $z = v\left(\frac{1}{2} - t\right)$.

```
> q:=factor(y_0[2]-(a-2*a*t));
```

$$q := \frac{2at(2t-1)(t-1)}{2t^2-2t+1}$$

Je tedy

$$\overrightarrow{TH} = \left(-\frac{a(2t-1)^2}{2t^2-2t+1}; \frac{2at(2t-1)(t-1)}{2t^2-2t+1}; v\left(\frac{1}{2} - t\right) \right).$$

Obecný bod $\overline{X}$ na přímce CD vyjádříme jako $\overline{X} = T + u \cdot \overrightarrow{TH}$, takže je

$$\overline{X} = \left[a - u \frac{a(2t-1)^2}{2t^2-2t+1}; a - 2at + u \frac{2at(2t-1)(t-1)}{2t^2-2t+1}; vt + u v \left(\frac{1}{2} - t \right) \right].$$

Stanovíme hodnotu parametru u tak, aby z -ová souřadnice bodu $\overline{X}$ byla nulová, a tedy bod $\overline{X}$ splýval s krajním bodem C tvořící úsečky CD . Po úpravě vychází, že $u = \frac{2t}{2t-1}$ a bod

$$C = \left[\frac{-a(2t^2-1)}{2t^2-2t+1}; \frac{a(2t^2-4t+1)}{2t^2-2t+1}; 0 \right].$$

Dále určíme hodnotu parametru u tak, aby z -ová souřadnice bodu $\overline{X}$ byla rovna v , a bod $\overline{X}$ splýval s krajním bodem D tvořící úsečky CD . Po úpravě vychází, že $u = \frac{2t-2}{2t-1}$ a bod

$$D = \left[\frac{-a(2t^2-4t+1)}{2t^2-2t+1}; \frac{-a(2t^2-1)}{2t^2-2t+1}; v \right].$$

Tvary souřadnic bodů C a D určíme pomocí příkazů v Maplu

```
> u1:=2*t/(2*t-1);
> x_C:=simplify(a+u1*p);
```

$$x_C := \frac{a(-2t^2+1)}{2t^2-2t+1}$$

```
> y_C:=simplify(normal(a-2*a*t+u1*q));
```

$$y_C := \frac{a(2t^2-4t+1)}{2t^2-2t+1}$$

```
> z_C:=simplify(v*t+u1*v*(0.5-t));
```

$$z_C := 0.0$$

```
> u2:=(2*t-2)/(2*t-1);
> x_D:=simplify(a+u2*p);
```

$$x_D := -\frac{a(2t^2-4t+1)}{2t^2-2t+1}$$

```
> y_D:=simplify(normal(a-2*a*t+u2*q));
```

$$y_D := \frac{a(-2t^2+1)}{2t^2-2t+1}$$

```
> z_D:=simplify(v*t+u2*v*(0.5-t));
```

$$z_D := 1.0v$$

Určíme souřadnice směřového vektoru $\overrightarrow{CD}$ jako

$$\overrightarrow{CD} = \left(\frac{a(4t-2)}{2t^2-2t+1}; -\frac{4at(t-1)}{2t^2-2t+1}; v \right).$$

Odpovídající příkazy v Maplu k tomu jsou:

```
> simplify(x_D-x_C);
```

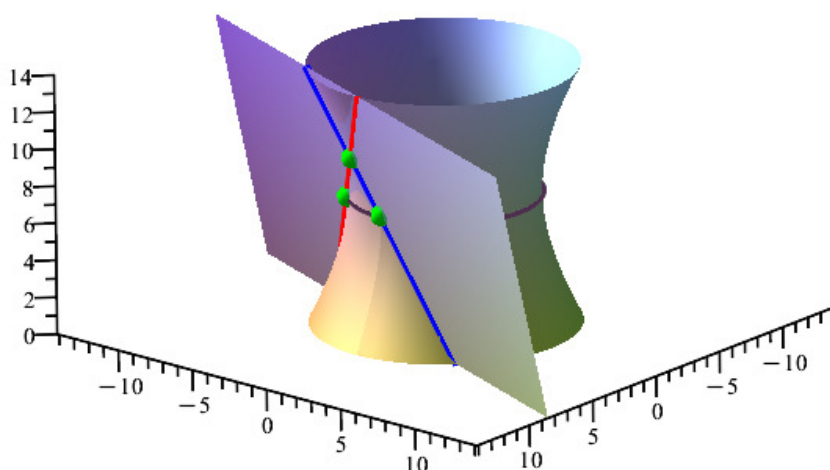
$$\frac{(4t-2)a}{2t^2-2t+1}$$

```
> simplify(y_D-y_C);
```

$$-\frac{4at(t-1)}{2t^2-2t+1}$$

Obecný bod $\overline{X}$ na úsečce CD má pro parametr $u \in \langle 0, 1 \rangle$ vyjádření $\overline{X} = C + u \cdot \overrightarrow{CD}$, jeho souřadnice jsou

$$\overline{X} = \left[\frac{-a(2t^2-1)}{2t^2-2t+1} + u \frac{a(4t-2)}{2t^2-2t+1}; \frac{a(2t^2-4t+1)}{2t^2-2t+1} - u \frac{4at(t-1)}{2t^2-2t+1}; uv \right].$$



Obr. 10. Tečná rovina jednodílného rotačního hyperboloidu

Na jednodílném rotačním hyperboloidu zobrazíme bod T na úsečce AB 1. přímkového regulu, v němž je sestrojena tečná rovina τ hyperboloidu obsahující rovněž úsečku CD 2. přímkového regulu. Tečná rovina τ je kromě bodu T určena také body H a $\overline{H}$ hrdelní kružnice h hyperboloidu. K požadovanému výsledku dospějeme zadáním následující posloupnosti příkazů v Maplu:

```
> restart:with(plots):
> b1:=color=blue:b2:=color=green:b3:=color=violet:b4:=color=red:
  t1:=thickness=5:
> a:=5:v:=14:
> r:=2*a*sqrt(t^2-t+0.5):
> RH:=plot3d([r*cos(phi),r*sin(phi),v*t],t=0..1,phi=0..2*Pi,
  style=patchnogrid):
> AB:=spacecurve([a,a-2*a*t,v*t],t=0..1,b1,t1):
> T:=[a,a-2*a*pos,v*pos],symbol=solidsphere,symbolsize=20,b2:
> H_AB:=pointplot3d([a,0,v/2],symbol=solidsphere,symbolsize=20,b2):
> H_CD:=[a*2*pos*(1-pos)/(2*pos^2-2*pos+1),a*(1-2*pos)/(2*pos^2-2*pos+1),
  v/2],symbol=solidsphere,symbolsize=20,b2:
> Anim_T:=animate(pointplot3d,[T],pos=0..1,frames=50):
> Anim_H:=animate(pointplot3d,[H_CD],pos=0..1,frames=50):
```

```
> tau:=x*v+y*v*(1-2*pos)+z*2*a*(1-2*pos)-2*a*v*(1-pos)=0,
  x=-2*a*sqrt(2)..2*a*sqrt(2),y=-2*a*sqrt(2)..2*a*sqrt(2),z=0..v,
  style=surface:
> Anim_tau:=animate(implicitplot3d,[tau],pos=0..1,frames=50):
> h:=spacecurve([a*cos(phi),a*sin(phi),v/2],phi=0..2*Pi,b3,t1):
> CD:={[-a*(2*pos^2-1)/(2*pos^2-2*pos+1)+u*a*(4*pos-2)/(2*pos^2-2*pos+1),
  a*(2*pos^2-4*pos+1)/(2*pos^2-2*pos+1)-u*4*a*pos*(pos-1)/(2*pos^2-2*pos+1),
  u*v]},u=0..1,b4,t1:
> Anim_CD:=animate(spacecurve,[CD],pos=0..1,frames=50):
> display(RH,AB,h,H_AB,Anim_T,Anim_H,Anim_tau,Anim_CD,axes=framed,
  scaling=constrained);
```

5 Závěr

Uvedené vizualizace jednoduchého rotačního hyperboloidu nám dávají dobrou představu o jeho vlastnostech a mohou být náhradou fyzického modelu této plochy.

Protože jednoduchý rotační hyperboloid je přímkovou plochou, z hlediska stavební praxe má výborné konstrukční a statické vlastnosti. Několik ukázek jeho reálného využití lze najít na stránce [3].

Literatura

- [1] MACHALA, F. *Plochy technické praxe*. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1986. 199 s.
- [2] *Maple 11: User manual*. Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2007.
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid>

Mgr. Alice Králová

Lesnická a dřevařská fakulta Mendelovy univerzity v Brně
Zemědělská 810/3, 613 00 Brno, Česká republika
e-mail: alice.kralova@mendelu.cz

Armiloid – plochy pselické a spirické

Daniela Velichová

Abstrakt

Pselické plochy tvoria špecifickú skupinu plôch, ktoré je možné považovať za isté zovšeobecnenie dvojsových rotačných plôch, konkrétne plôch Eulerovho typu. Tieto plochy možno generovať z riadiacej krivky pomocou dvoch systémov viazaných stredových kolíneácií. Armiloid, ako typický reprezentant skupiny, predstavil a synteticky definoval v roku 1929 profesor Dr. František Kadeřávek. V článku je opísaná syntetická konštrukcia armiloidu, uvedená je jeho analytická vektorová reprezentácia a ďalej sú zovšeobecnené a predstavené skupiny pselických a spirických plôch. Uvedené sú tiež ilustrácie variácií foriem týchto plôch.

Kľúčové slová: armiloid, kolíneácia, pselické a spirické plochy, zovšeobecnené rotačné plochy, modelovanie plôch

Abstract

Pselical surfaces form a specific group of surfaces that can be regarded as generalized two-axial surfaces of revolution, surfaces of Euler type, in particular. These surfaces can be generated from a basic curve by applying 2 systems of linked central collineations. Armiloid, as one typical representative of this group, was defined synthetically and presented in 1939 by Professor Dr. František Kadeřávek. In this paper we describe the synthetic construction of armiloid, introduce its analytic vector representation and further generalize it to the presented groups of pselical and spirical surfaces. Illustrations of surface form variations are included.

Keywords: armiloid, central collineation, pselical and spirical surfaces, generalised surfaces of revolution, modelling surfaces

1 Úvod

V roku 1939 publikoval profesor František Kadeřávek (1885 - 1961) krátky článok s názvom Zovšeobecnění rotačních ploch vo Věstniku Královské české společnosti nauk, [1]. V článku definoval synteticky - konštrukčne novú plochu armiloid, predstavujúcu typického reprezentanta špecifickej skupiny plôch, ktoré uviedol ako zovšeobecnené rotačné plochy a nazval plochy pselické. Časopis Věstník Královské české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědná, je pravdepodobne jedným z prvých matematických vedecko-náučných časopisov vydávaných v stredoeurópskom priestore, ktorý v rokoch 1800 – 1953 publikovala, ako svoj vtedajší „Newsletters“, Královská česká společnost nauk. Kompletne digitálne verzie všetkých čísel vydaných v období rokov 1917 – 1953 sú k dispozícii k nahliadnutiu na webových stránkach Digitální knihovny Akademie věd ČR, na adrese [2].

Pselické plochy tvoria špecifickú skupinu plôch, ktorú možno považovať za isté zovšeobecnenie rotačných plôch, konkrétne plôch nazvaných dvojsovové rotačné plochy Eulerovho typu, opísané v prácach [3], [4]. Tieto plochy sú generované súčasným otáčaním danej riadiacej krivky v priestore okolo dvoch mimobežných priamok, zvolených osí rotácií. Pri hľadaní zdrojovej literatúry týkajúcej sa zovšeobecnenia rotačných plôch, autorka našla kontakt na digitálnu verziu časopisu Věstník Královské české společnosti nauk, ročník 1939, třída matematicko-přírodovědná, číslo XVII, s článkom profesora Kadeřávka, obr. 1.

XVII.

Zevšeobecnění rotačních ploch.

Napsal dr. FR. KADEŘÁVEK, Praha.

(Předloženo dne 10. května 1939.)

Zevšeobecnění rotačních ploch dalo se dosud buď afinní nebo kolineární transformací. Plochy rotační však vedou myšlenkově dále, k plochám, k nimž dojdeme touto úvahou:

Vytkneme (obr. 1) dvě k sobě kolmé roviny π a ν a v nich dvě, k těmto rovinám kolmé přímky $^1O \perp \pi$ a $^2O \perp \nu$. V rovině ν umístíme křivku M — zvolena byla v části křivky, která tvoří nárys vrženého stínu přímky na anuloid — a sestrojíme k ní kolineární křivku N pro 1O jako osu a 2O_2 jako střed příslušné kolíneace, jejíž charakteristika buď k ! Sdruženými body m a n křivky M a N proložíme v rovině π libovolnou křivku A — v daném případě byla zvolena kruhová úpatnice o vrcholech v bodech m a n ! Roviny $\beta, \gamma, \dots$ procházející přímkou 1O vytínají na křivkách M a N sdružené body v kolíneaci $(^1O, ^2O_2, k)$, jejichž půdorysy prokládáme křivky $B, C, \dots$ kolineárně sdružené se zvolenou křivkou A v kolíneaci o středu 1O_1 , ose 2O_1 a sdružených bodech m_1, n_1 tedy o charakteristice $k' = k^{-1}$. Křivky $A, B, C, \dots$ jsou průřez křivky $A, B, C, \dots$, které v prostoru vyplňují určitou plochu η . Roviny, které jdou osou 1O , vytýčují na této ploše křivky, které jsou mezi sebou kolineární — spojnice sdružených bodů v půdoryse se protínají na přímce 2O_1 a v náryse jdou bodem 2O_2 — i jest řez T v τ kolineární s řezem N v ν a proto kolineární i se zvolenou původní křivkou M v ν . I dva obecně zvolené řezy R a Q v rovinách ρ a κ svazku 1O jsou na ploše kuželové, jejíž vrchol γ jest v ose 1O . Toto platí i v případě mezním: řez T v rovině τ a jeho souměrný T' určují kuželovou plochu, která se uvažované plochy η dotýká podél křivky $T \equiv T'$ a má vrchol γ na ose 1O .

Obdobné řezy osnovy 2O , jsouce centricky kolineární, určují kuželové plochy o vrcholech na ose 1O — na příklad řez E s řezem F spočívají na kuželové ploše o vrcholu ν v ose 1O a řez E v rovině ε a jeho soumez-

Věstník Královské české společnosti nauk. Třída mathematicko-přírodovědecká

Mémoires de la Société royale des sciences de Bohême. Classe des sciences

ISSN 1210-5899

[Přejít na periodikum](#)

Dokument není veřejně přístupný



Ročník

Rok vydání 1940

Ročník 1939

[Přejít na ročník](#)

Číslo

Datum vydání 1940

Číslo

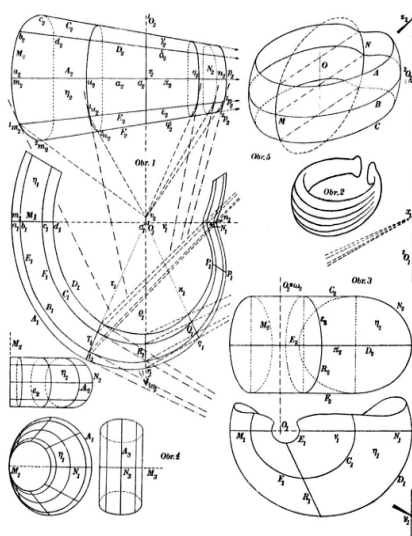
[Následující číslo](#)

Nakladatelské údaje

V Praze: Královská česká společnost nauk. 1918-1953

2

Fr. Kadeřávek:



ný E' určují kuželovou plochu o vrcholu w , která se dané plochy η podél křivky E dotýká.

Uvažovaná plocha η zevšeobecněje rotační plochy, jak z uvedeného jest patrné. Použitá plocha svým tvarem připomíná praeistorické náramky — latinsky armilla, řecky *ψέλιον* — (obr. 2), plochy tohoto zákonného vytváření vyskytají se často v technické praxi a zevšeobecnějí plochu prstence — anuloidu, plochu spirickou — proto je pro ně vhodným názvem jméno: plocha náramková — armiloid, plocha pselická.

V obr. 3 zobrazený armiloid η má v rovině ν dvě afinní elipsy M a N jako křivky řídící, v rovinách rovnoběžných s rovinou π jsou na něm položeny homotetické elipsy $C, D, E, \dots$. Vyhledáme-li pro směr sčítání totožný s π_2 elipsy $e_2 \equiv (M + N) : 2$, tu pro prostorové sčítání o základní rovině $\omega \perp \nu$ a směr sčítání kolmý k ω bude součet $\zeta \equiv (\eta - \varepsilon)$, kde ε jest válcová plocha kolmá k ν a mající v ε_2 svůj nárys, afinní plochou k ploše

Zevšeobecnění rotačních ploch.

3

rotační, protože všechny povrchové elipsy armiloidu η se v prostoru přefadí tak, že zůstanou homotetickými, ale jejich středy přejdou vesměs na přímkou O . I možno zde pro tento zvláštní armiloid dělati závěry na řezy rovin dvakrát se plochy η dotýkajících z vlastností anuloidu.

Kolineaci i afinitu křivek řídících lze při vytvořování armiloidu si zvoliti tak, aby jedna z dvojiny hlavních křivek řídících M a N , na příklad M , přešla do úsečky. Tento případ je vyznačen v obr. 4. Křivka M přešla zde do úsečky uniplanárních bodů plochy η , podél níž se oba její pláště, jeden vyplněný body eliptickými, druhý body hyperbolickými, navzájem dotýkají. Oba pláště jsou rozděleny dvěma kružnicemi kraterovými, které vytýčují v M dva body kuspídní. Součet $(\eta - \varepsilon)$ pro kolmé sčítání o základní rovině totožné s promítací rovinou přímky M do nárysu ν převádí tento armiloid do rotační plochy.

Obě křivky M a N mohou i býti dvěmi větve mi téže křivky, která je sama k sobě kolineární pro osu 1O a střed 2O_2 (obr. 1), po případě sama k sobě afinní nebo souměrná podle osy O . Tak při ploše zobrazené v obr. 5 křivka $M \equiv N$ byla zvolena v jediné křivce eliptické a za homotetické řezy tvořící zvoleny byly kruhové úpatnice $A, B, C, \dots$. Plocha zde zobrazená není však geometrickým celkem. Vedeme-li osou O libovolnou rovinu, jsou v ní k obloukům M a N křivky kolineární, ale netvořící jednu kuželosečku, protože zvolené řezy $A, B, C, \dots$ nejsou podle osy O centricky souměrné. Je zřejmo, že zobrazená plocha a další plocha, k ní podle osy O osově souměrná, dotýkající se jí podél M a N a mající v rovině jdoucí osou O kolmo k rovině křivky řídící další kuželosečku s ní společnou, teprve dohromady tvoří geometrický celek.

Jsou-li tvořící i řídící křivky křivkami algebraickými a je-li souhrn stupňů křivek M a N roven m a jsou-li tvořící křivky $A, B, \dots$ stupně a -tého, je vytvořená plocha algebraickou plochou stupně $s = a \cdot m : 2$.

RÉSUMÉ.

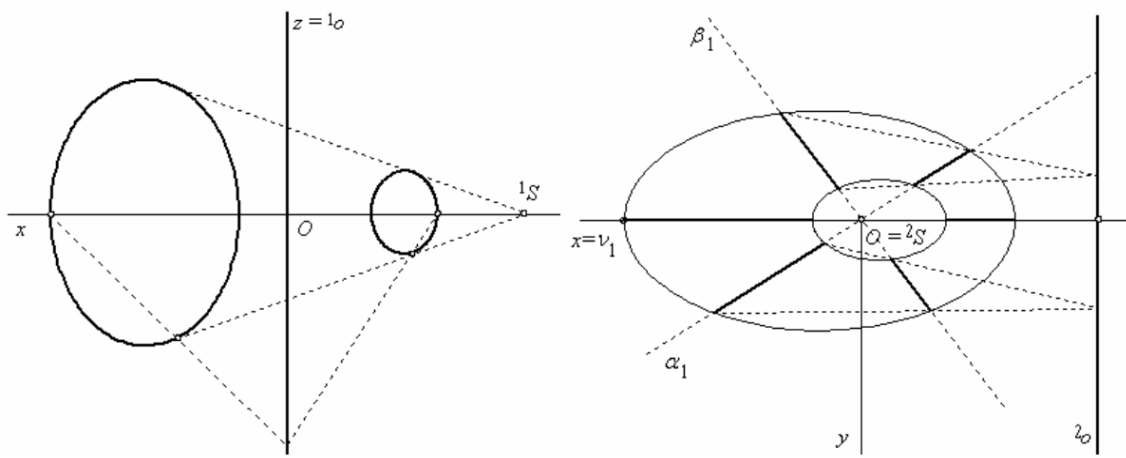
Sur la généralisation des surfaces de révolution.

Etant données deux courbes homologues M, N pour les axes $^1O \perp ^2O$, on peut construire sur les cordes joignant les points conjugués des courbes M, N dans les plans du faisceau 1O les courbes $A, B, C, \dots$ aussi homologues pour les axes $^2O \perp ^1O$. Les courbes $A, B, C, \dots$ font une surface — une généralisation des surfaces de révolution, ressemblante au bracelet, armilla en latin, et c'est pour cela qu'on peut appeler cette surface un armiloid. Cette surface est munie de deux systèmes des courbes homologues entre eux le long desquelles touchent la surface les cônes ayant les sommets sur les axes $^1O, ^2O$. On peut choisir les courbes M, N dans les deux branches d'une même courbe ou remplacer une des courbes par une droite.

Obr. 1. Publikovaný článek profesora Kadeřávka

Armiloid je definovaný ako plocha vytvorená zloženým pohybom zvolenej riadiacej krivky (napr. kružnice alebo elipsy), ktorý je určený zložením dvoch systémov navzájom viazaných stredových kolíneácií projektívneho priestoru určených charakteristikami. Osami týchto kolíneácií sú dve mimobežné kolmé priamky projektívne rozšíreného euklidovského priestoru, pričom stredu jedného systému kolíneácií ležia vždy na osi druhého systému kolíneácií. Charakteristiky týchto dvoch systémov kolíneácií sú navzájom prevrátené reálne čísla. Plochy, generované z ľubovoľnej riadiacej krivky pomocou takýchto dvoch systémov stredových kolíneácií, tvoria skupinu pselických plôch. V článku profesora Kadeřávka je detailne opísaná konštrukcia armiloidu realizovaná v Mongeovej projekcii. Zvolenou riadiacou krivkou je nárys časti krivky, ktorá tvorí vrhnutý tieň priamky na rotačnom anuloidu. Združenými priemetmi dvojíc odpovedajúcich si bodov kolíneárne združených kriviek v náryse je v pôdoryse vedená krivka kardioda. Pre detailný opis konštrukcie základnej verzie armiloidu a následné odvodenie jeho analytického parametrického vektorového vyjadrenia sme v článku zvolili nasledujúce zjednodušené determinujúce prvky.

Určujúce stredové kolíneácie sú dané mimobežnými osami ${}^1o \perp {}^2o$ umiestnenými v nárysní (1o v súradnicovej osi z) a v pôdorysní (2o v priamke rovnobežnej so súradnicovou osou y) a stredmi 1S , 2S ležiacimi na osiach združených kolíneácií, ${}^1S \in {}^2o$, ${}^2S \in {}^1o$. Prvý systém stredových kolíneácií je generovaný otáčaním určujúcej kolíneácie ${}^1\mathcal{K}$ (${}^1o = z$, 1S , $k(v)$) okolo osi 1o , pričom stredy kolíneácií tohto systému ležia vždy na priamke 2o a ich charakteristiky sú určené ako hodnoty funkcie jednej premennej $k(v)$ v závislosti od uhla otočenia. Druhý viazaný systém stredových kolíneácií určuje kolíneácia ${}^2\mathcal{K}$ (${}^2o \parallel y$, ${}^2S = O$, $h(v)$), kde $h(v) = 1/k(v)$. Všetky kolíneácie tohto systému sú generované kolíneáciami prvého systému v rovinách zväzku s osou 1o premietnutých do pôdorysne do priamok so spoločným bodom ${}^2S = O$. Majú teda spoločný stred 2S v začiatku súradnicovej sústavy, os 2o a ich charakteristiky sú určené ako prevrátené hodnoty príslušných charakteristík združených kolíneácií z prvého systému. Riadiacou krivkou armiloidu nech je elipsa ležiaca v nárysní, so stredom na súradnicovej osi x a polosami a a b na osiach v súradnicovej osi x a na priamke rovnobežnej so súradnicovou osou z , obr. 2.

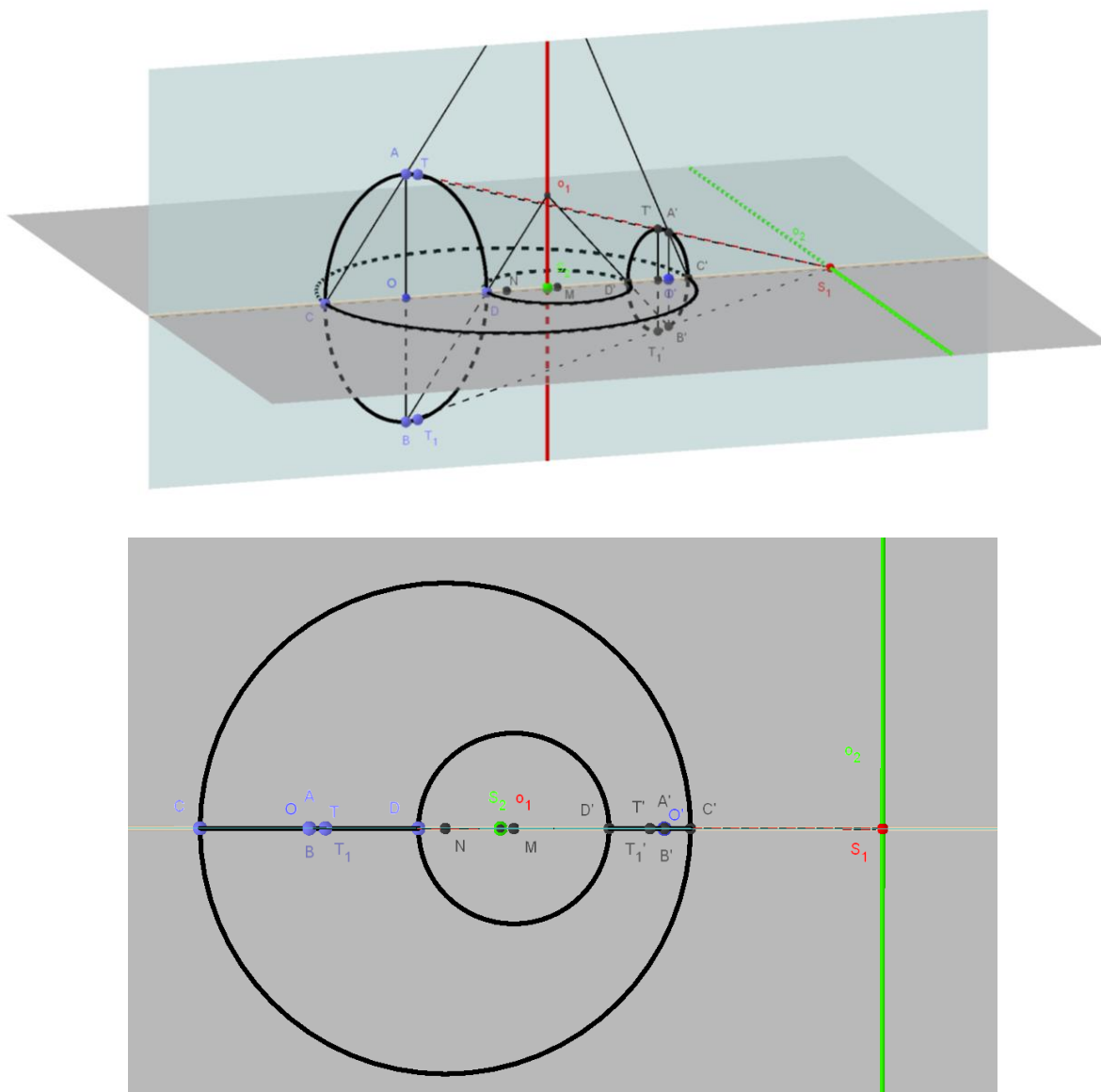


Obr. 2. Určujúce stredové kolineácie s kolmými mimobežnými osami ${}^1o \perp {}^2o$
a stredmi ${}^1S \in {}^2o$, ${}^2S \in {}^1o$

Konstrukcia armiloidu je realizovaná v prostredí programu GeoGebra, ktoré umožňuje interaktívnu manipuláciu s určujúcimi prvkami a modelovanie rôznych variácií formy tejto plochy v závislosti od vzájomnej polohy určujúcich prvkov.

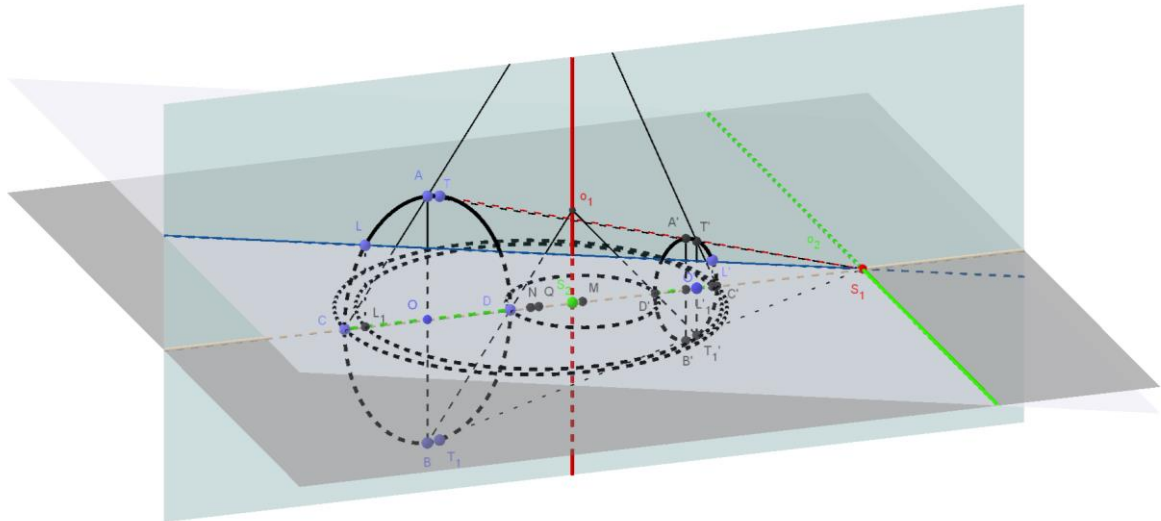
2 Konštrukcia armiloidu

Zvolíme riadiacu elipsu a zostrojíme jej kolineárny obraz v určujúcej kolineácii prvého systému ${}^1\mathcal{K}$ (${}^1o = z$, ${}^1S = k(v)$). Kolmým prietom do pôdorysne je definovaná druhá určujúca kolineácia ${}^2\mathcal{K}$ (${}^2o \parallel y$, ${}^2S = O$, $h(v)$) združeného systému kolineácií, v ktorej si navzájom odpovedajú úsečky ako pôdorysné priemety riadiacej elipsy a jej kolineárneho obrazu. Priemetmi kriviek prechádzajúcich pôdorysmi dvojíc kolineárne si odpovedajúcich bodov ($C \rightarrow C'$, $D \rightarrow D'$) sú ľubovoľne zvolené krivky, napr. kružnice so stredmi M , N , obr. 3.



Obr. 3. Konštrukcia armiloidu z riadiacej elipsy v nárysní

Sústavy parametrických kriviek armiloidu sú determinované nasledovne. Roviny zväzku s osou v priamke 2o pretínajú riadiacu elipsu a jej kolineárny obraz v bodoch ($L \rightarrow L'$) odpovedajúcich si v kolineácii z prvého systému kolineácií určeného kolineáciou ${}^1\mathcal{K}$ a ich pôdorysy určujú dvojice bodov ($L_1 \rightarrow L'_1$), ktorými prechádzajú kružnice ako pôdorysné priemety prvej sústavy parametrických kriviek modelovaného armiloidu (rovinné krivky v rovinách zväzku), obr. 4.



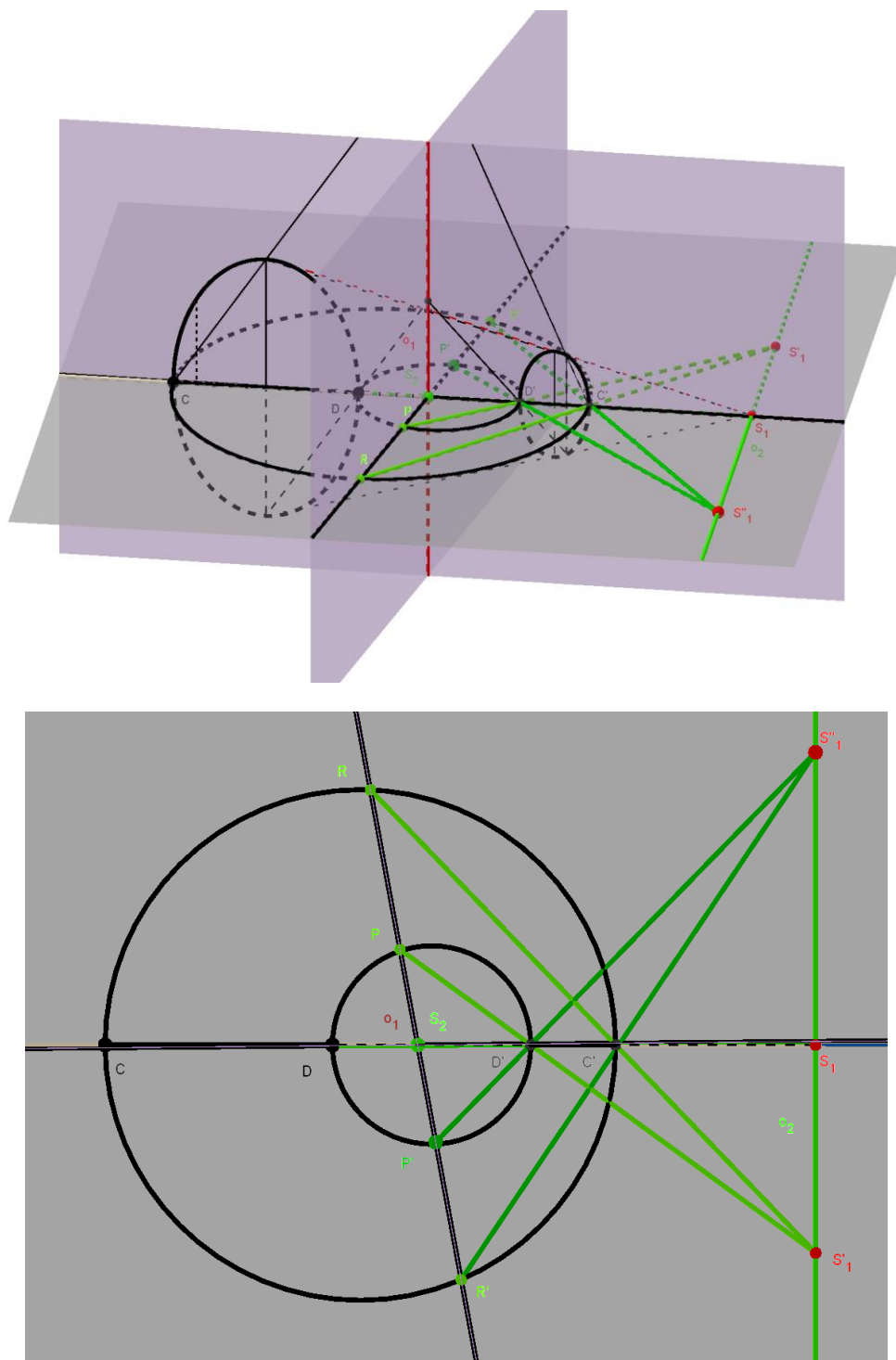
Obr. 4. Konštrukcia parametrických kriviek armiloidu, [5]

V rovinách zväzku, ktorý vznikne otáčaním nárysne okolo priamky $^1o = z$, ležia krivky tvoriace druhú sústavu parametrických kriviek armiloidu, elipsy združené v kolineáciách prvého systému kolineácií s charakteristikami určenými hodnotami charakteristickej funkcie $k(v)$. Tieto roviny pretínajú parametrické krivky prvej sústavy armiloidu v kolineárne si odpovedajúcich bodoch určujúcich dvojice kolineárne združených elíps vzhľadom na systém kolineácií determinovaný stredovou kolineáciou $^1\mathcal{K}$, ktorých stredy ležia na priamke 2o . Pôdorysmi týchto elíps sú úsečky $PR \rightarrow P'R'$, kolineárne združené vzhľadom na kolineácie druhého systému indukované kolineáciou $^2\mathcal{K}$, obr. 5.

Generovaná plocha – armiloid, si nezachováva charakteristickú vlastnosť rotačných plôch súvisiacu s existenciou dotykovej kužeľovej plochy. Dotyková kužeľová plocha je obálkou dotykových rovín danej rotačnej plochy v bodoch jednej jej rovnobežkovej kružnice, v ktorej sa danej rotačnej plochy dotýka. V každej rovnobežkovej kružnici rotačnej plochy existuje takáto rotačná kužeľová plocha (v bodoch rovníkovej a hrdlovej kružnice je to valcová plocha a v bodoch kráterových kružníc dotyková rovina plochy) tvorená dotyčnicami meridiánov v bodoch danej rovnobežkovej kružnice. Dotyčnice riadiacej krivky pselickej plochy a jej kolineárnych obrazov v rovinách zväzku s osou 1o , ktoré tvoria jednu sústavu parametrických kriviek na pselickej ploche, neležia na kužeľovej ploche s vrcholom na osi 1o . Dotyková rovina armiloidu v bode plochy T je jednoznačne určená dotyčnicami parametrických kriviek plochy, ktoré týmto bodom prechádzajú, obr. 6. Analytická reprezentácia dotykovej roviny armiloidu je uvedená v časti 3, kde je vyjadrená z parametrickej vektorovej rovnice plochy.

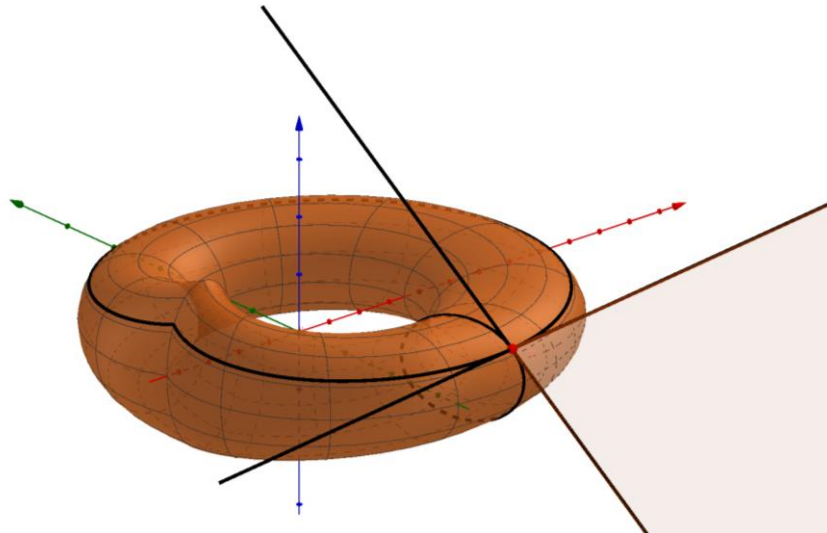
Predpoklad o zachovaní uvedenej vlastnosti rotačných plôch viedol profesora Kadeřávka k názvu svojho článku, v ktorom prezentoval armiloid a jeho konštrukciu, a predstavil pselické plochy ako isté zovšeobecnenie rotačných plôch. Zovšeobecnenie dvojice rotácií okolo kolmých mimobežných osí, ktoré tvoria generujúci princíp dvojsových rotačných plôch, na dvojicu združených stredových kolineácií s osami v týchto kolmých mimobežných priamkach však azda možno uznať ako dostatočný dôvod na akceptovanie zámeru profesora Kadeřávka považovať pselické plochy za zovšeobecnenie dvojsových rotačných plôch.

Dôvod, pre ktorý boli zvolené názvy pselické/spirické plochy a armiloid, je uvedený v obr. 1.



Obr. 5. Animovaná konštrukcia armiloidu v prostredí programu GeoGebra, [5]

Krátke pojednania o armiloide a o skupinách pselických a spirických plôch bez ďalších zovšeobecnení sú uvedené v článkoch [5] - [7], ktoré boli publikované v anglickom jazyku. Tento príspevok je podstatným rozšírením a doplnením predchádzajúcich článkov o zovšeobecnenia pselických a spirických plôch s uvedením niektorých špecifických vlastností a špeciálnych príkladov plôch. Článok je zostavený v jazyku slovenskom, ako dodatočná informácia pre domácu slovenskú a českú geometrickú komunitu, ktorá nadväzuje na výsledky tvorivej vedeckej práce našich predchodcov, medzi ktorých profesor Kadeřávek nesporne patrí.



Obr. 6. Dotyková rovina armiloidu v bode T určená dotyčnicami parametrických kriviek plochy v danom bode

3 Parametrické rovnice armiloidu

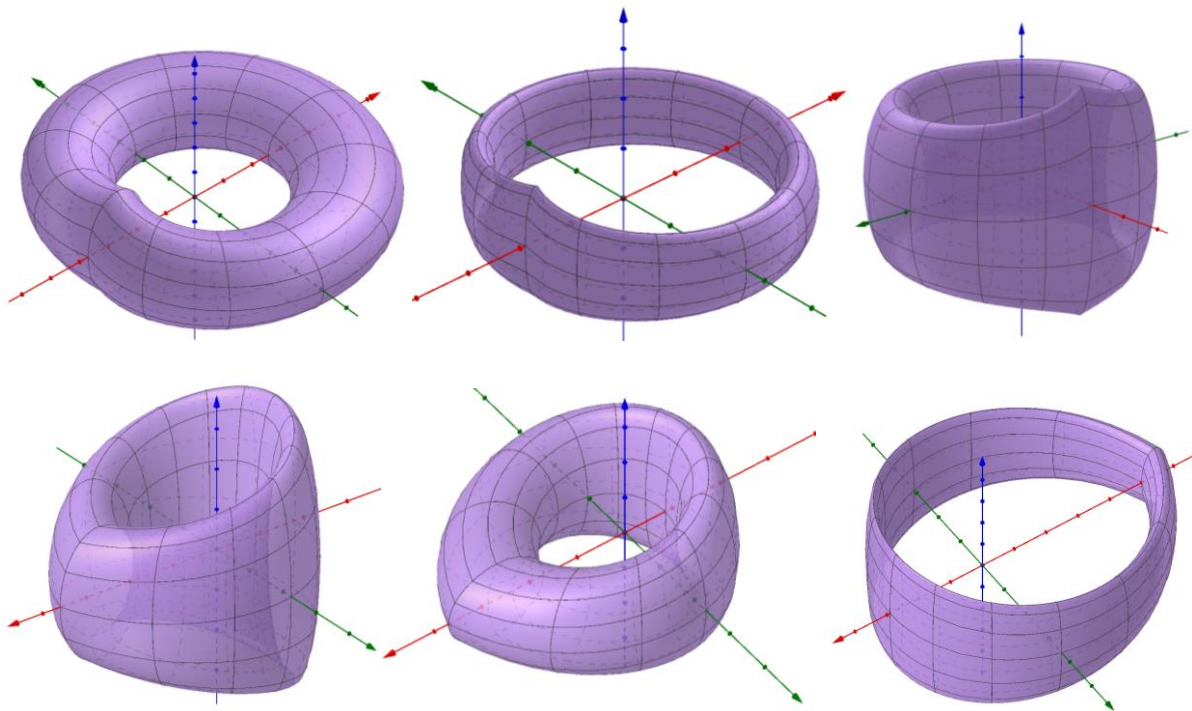
Nech sú osi určujúcich stredových kolíneácií mimobežné kolmé priamky, súradnicová os x a priamka rovnobežná so súradnicovou osou y . Riadiaca elipsa armiloidu nech je umiestnená v súradnicovej rovine Oxz , stred elipsy je bod $S = [m, 0, 0]$ a dĺžky polosí sú: a na súradnicovej osi x , b na rovnobežke so súradnicovou osou z . Vektorová rovnica armiloidu určeného danými stredovými kolíneáciami má tvar

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m + a \cos 2\pi u)h(v) \cos 2\pi v \\ (m + a \cos 2\pi u)h(v) \sin 2\pi v \\ b k(v) \sin 2\pi u \end{pmatrix}, (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$$

kde $k(v) = \frac{1}{h(v)}$, $v \in \langle 0, 1 \rangle \subset \mathbb{R}$ sú funkcie vyjadrujúce hodnoty viazaných charakteristík kolíneácií z dvoch systémov kolíneácií generovaných danými určujúcimi stredovými kolíneáciami. Hodnoty týchto funkcií ovplyvňujú tvar armiloidu, pretože ovplyvňujú tvar kolíneárnych obrazov riadiacej elipsy. Niekoľko foriem armiloidu generovaných voľbou rôznych hodnôt parametrov a , b , m a tvaru spojitých funkcií $h(v)$ ilustruje obr. 7.

Základný tvar armiloidu, uzavretá plocha rodu 2, prezentovaný v článku profesora Kadeřávka, je určený charakteristickou funkciou $h(v) = -2v^2 + 2v + 1$ (prvý riadok na obr. 7.). Prezentované modifikácie sú generované prípustnou voľbou inej charakteristickej funkcie, $h(v) = 2v^2 - 2v + 1$ (druhý riadok na obr. 7.). Obe charakteristické funkcie musia spĺňať stanovené požiadavky, pričom pre $h(0) = h(1) = 1$ je zabezpečený uzavretý tvar armiloidu.

Parametrické u -krivky plochy sú elipsy, každá parametrická v -krivka obsahuje jeden kuspídálny bod. Všetky kuspídálne body z týchto kriviek ležia na riadiacej elipse v základnej polohe, určenej hodnotami parametra $v \in \{0, 1\}$, ktorá tvorí jedínú hranu na uzavretom armiloide. Táto krivka uzatvárajúca plochu je množinou všetkých singulárnych bodov armiloidu.



Obr. 7. Rôzne formy armiloidu

Dotyková rovina armiloidu v bode $T = [u_0, v_0]$, $(u_0, v_0) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ je určená vektorovou rovnicou $\overrightarrow{TX} \cdot \mathbf{n} = 0$, kde $X = [x, y, z]$ je bod dotykovej roviny a $\mathbf{n}$ je vektor normály plochy určený vzťahom $\mathbf{n} = \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$,

$$\mathbf{p}_u(u, v_0) = \begin{pmatrix} x_u(u, v_0) \\ y_u(u, v_0) \\ z_u(u, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2\pi a \sin 2\pi u)h(v_0) \cos 2\pi v_0 \\ (-2\pi a \sin 2\pi u)h(v_0) \sin 2\pi v_0 \\ b k(v_0) \cos 2\pi u \end{pmatrix}, u \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\mathbf{p}_v(u_0, v) = \begin{pmatrix} x_v(u_0, v) \\ y_v(u_0, v) \\ z_v(u_0, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m + a \cos 2\pi u_0)(h'(v) \cos 2\pi v - 2\pi h(v) \sin 2\pi v) \\ (m + a \cos 2\pi u_0)(h'(v) \sin 2\pi v + 2\pi h(v) \cos 2\pi v) \\ b k'(v) \sin 2\pi u_0 \end{pmatrix}, v \in \langle 0, 1 \rangle$$

Výsledná rovnica dotykovej roviny armiloidu je v tvare

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \\ x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

V ďalšom sú odvodené výrazy pre vyjadrenie diskriminantov prvej a druhej základnej diferenciálnej formy plochy – φ_1 , φ_2 a pre Gaussovu krivosť K plochy, ktorá je definovaná ako podiel týchto diskriminantov v ľubovoľnom regulárnom bode plochy $M = [u, v]$. Všetky tri uvedené vzťahy sú však dosť neprehľadné a pomerne zložité a bude potrebné ich dôkladne detailne analyzovať s cieľom objaviť prípadné ďalšie zaujímavé vlastnosti armiloidu a všeobecne pšielických a spirických plôch.

$$\varphi_1 = \frac{4\pi^2}{(1-2v+2v^2)^6}$$

$$\begin{aligned} & (-2-4v^2(am(1-2v+2v^2)^4+(b^2+a^2(1-2v+2v^2)^4)\cos^2(2\pi u)\sin^2(2\pi u)+4(b^2\cos^2(2\pi u)+ \\ & +a^2(1-2v+2v^2)^4\sin^2(2\pi u))((1-2v+2v^2)^4((1-2v)^2+\pi^2(1-2v+2v^2)^2)(m+a\cos(2\pi u))^2\cos^2(2\pi v)+ \\ & +b^2(1-2v)^2\sin^2(2\pi u)^2+(1-2v+2v^2)^4((1-2v)^2+\pi^2(1-2v+2v^2)^2)(m+a\cos(2\pi u))^2\sin^2(2\pi v))) \end{aligned}$$

$$\varphi_2 =$$

$$\begin{aligned} & = (32ab^2\pi^4(1-2v+2v^2)^6((m+a\cos(2\pi u))^2(2m(1-6v+6v^2+\pi^2(1-2v+2v^2)^2)\cos(2\pi u)+a(-2(1-2v)^2 \\ & + (1+\pi^2(1-2v+2v^2)^2)\cos(4\pi u)+(4-20v+20v^2)\cos(4\pi u)))-2a(1-2v)^2(a+m\cos(2\pi u))^2\sin^2(2\pi u))/ \\ & (-2-4v)^2\sin^2(2\pi u)(b^2\cos(2\pi u)+a(1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))\cos^2(2\pi v)+a(1-2v+2v^2)^4 \\ & (m+a\cos(2\pi u))\sin^2(2\pi v))^2+(b^2\cos^2(2\pi u)+a^2(1-2v+2v^2)^4\cos^2(2\pi v)\sin^2(2\pi u)+a^2(1-2v+2v^2)^4 \\ & \sin^2(2\pi u)\sin^2(2\pi v))(b^2(2-4v)^2\sin^2(2\pi u)+(1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))^2(2\pi(1-2v+2v^2)\cos(2\pi v)+ \\ & (-2+4v)\sin(2\pi v))^2+(1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))^2((-2+4v)\cos(2\pi v)-2\pi(1-2v+2v^2)\sin(2\pi v))^2)) \end{aligned}$$

$$K =$$

$$\begin{aligned} & = (8ab^2\pi^2(1-2v+2v^2)^{12}((m+a\cos(2\pi u))^2(2m(1-6v+6v^2+\pi^2(1-2v+2v^2)^2)\cos(2\pi u)+a(-2(1-2v)^2+ \\ & +\pi^2(1-2v+2v^2)^2+(\pi^2(1-2v+2v^2)^2+4(1-5v+5v^2))\cos(2\pi u)))-2a(1-2v)^2(a+m\cos(2\pi u))^2\sin^2(2\pi u))/ \\ & ((2-4v)^2\sin^2(2\pi u)(b^2\cos(2\pi u)+a(1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))\cos^2(2\pi v)+ \\ & +a(1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))\sin^2(2\pi v))^2-(b^2\cos^2(2\pi u)+a^2(1-2v+2v^2)^4\cos^2(2\pi v)\sin^2(2\pi u)+ \\ & +a^2(1-2v+2v^2)^4\sin^2(2\pi u)\sin^2(2\pi v))(b^2(2-4v)^2\sin^2(2\pi u)+ \\ & + (1-2v+2v^2)^2(m+a\cos(2\pi u))^2(2\pi(1-2v+2v^2)\cos(2\pi v)+(-2+4v)\sin(2\pi v))^2+ \\ & + (1-2v+2v^2)^4(m+a\cos(2\pi u))^2((-2+4v)\cos(2\pi v)-2\pi(1-2v+2v^2)\sin(2\pi v))^2)) \end{aligned}$$

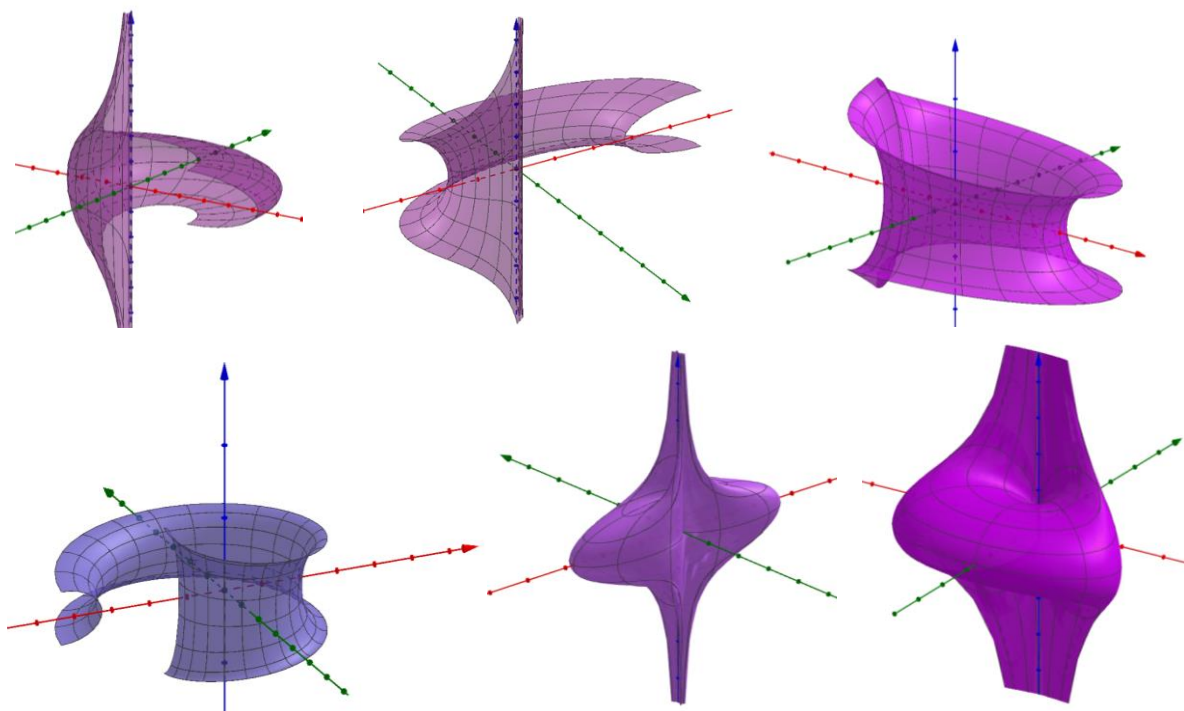
4 Pselické plochy

Skupinu plôch pomenovanú pselické plochy tvoria plochy generované z ľubovoľnej regulárnej riadiacej krivky pomocou dvoch systémov kolineácií s nezápornými združenými charakteristikami určenými hodnotami spojitých funkcií $h(v)$ a $k(v)$ definovanými na tom istom intervale, pričom $k(v) = \frac{1}{h(v)}$, $v \in \langle 0,1 \rangle \subset \mathbb{R}$.

Výber riadiacej krivky, jej určujúcich parametrov a charakteristickej funkcie $h(v)$ determinujú tvar generovanej pselickéj plochy a jej vlastnosti.

Na obr. 8 sú zobrazené rozličné formy pselických plôch (v riadkoch postupne zľava doprava) vygenerované z riadiacej elipsy alebo jej časti, voľbami nasledujúcich charakteristických funkcií

$$\begin{aligned} h(v) &= 1 - v, & h(v) &= 1 + \cos v, & h(v) &= 1 + \sin v \\ h(v) &= e^{\frac{v}{2\pi}}, & h(v) &= \sin v, & h(v) &= \cos v \end{aligned}$$



Obr. 8. Pselické plochy

5 Spirické plochy

Príbuzná skupina plôch – spirické plochy, ktoré možno považovať za zovšeobecnené anuloidy, je generovaná zo základnej riadiacej elipsy systémom osových afínit určených vzťahom

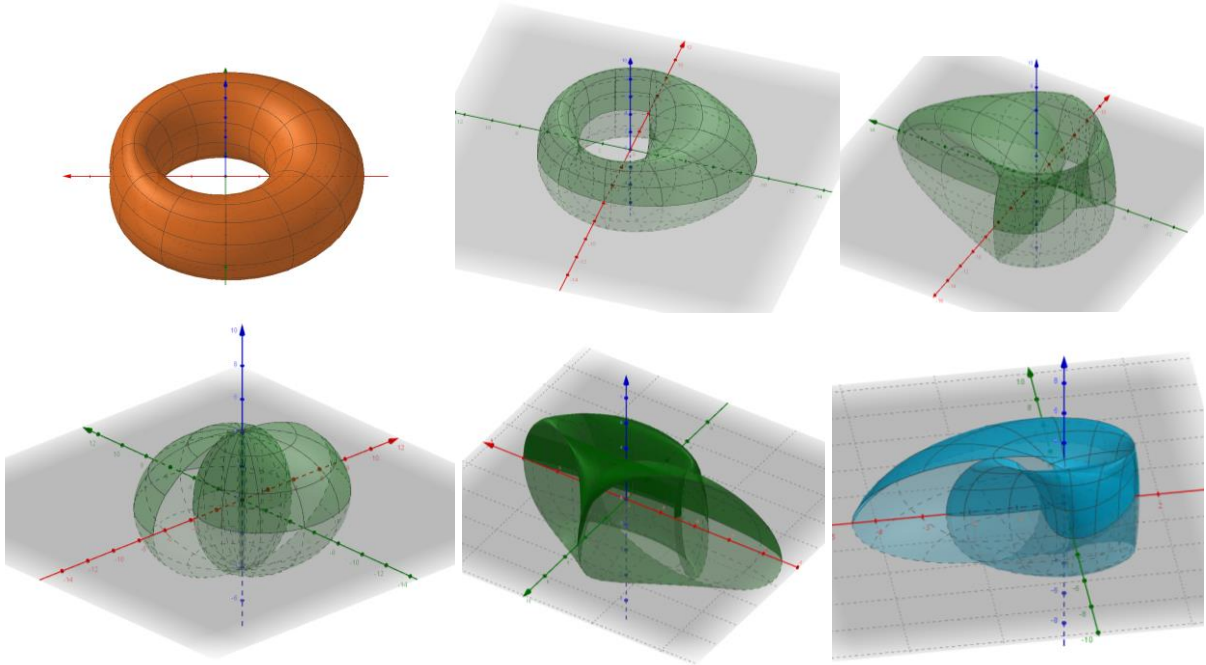
$$\mathcal{A}^i(o^i = z, s^i \perp o^i, h(v))$$

kde funkcia $h(v)$ spojitá na intervale $\langle 0, 1 \rangle \subset \mathbf{R}$ definuje premenlivú charakteristiku afínit v rovinách zväzku, ktorý vznikne otáčaním roviny riadiacej elipsy okolo súradnicovej osi z . Jednparametrický systém rovnoľahlostí takto vytvorený v rovine $\pi = xy$ je určený stredmi v začiatku súradnicovej sústavy O , pričom koeficienty jednotlivých rovnoľahlostí sú definované istou funkciou $l(v)$ spojitou na intervale $\langle 0, 1 \rangle \subset \mathbf{R}$.

Parametrické rovnice spirických plôch na $\langle 0, 1 \rangle^2 \subset \mathbf{R}^2$ generovaných z riadiacej elipsy umiestnenej rovnako ako pri armiloide sú vyjadrené v tvare

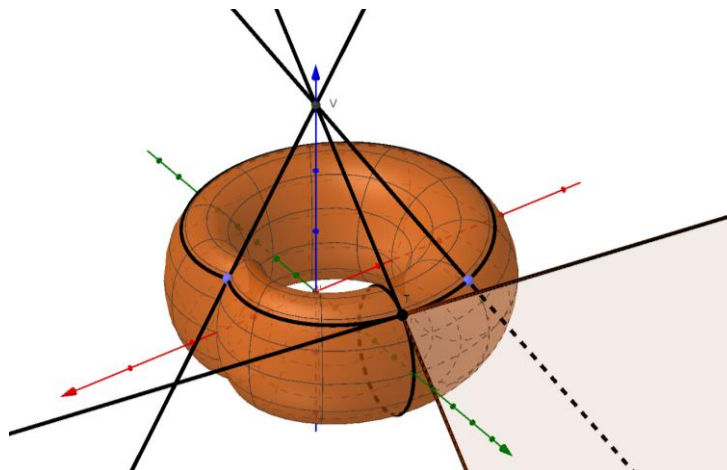
$$\begin{aligned} x(u, v) &= (m + a h(v) \cos 2\pi u) \cos 2\pi v \\ y(u, v) &= (m + a h(v) \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \\ z(u, v) &= b \sin 2\pi u \end{aligned}$$

Voľbou rôznych hodnôt parametrov a , b , m a vyjadrenia funkcie $h(v)$ vygenerujeme rôzne formy spirických plôch, niektoré zaujímavé tvary sú ilustrované na obr. 9. Voľba dvoch rôznych charakteristických funkcií $h(v)$ a $k(v)$ ovplyvňujúcich x -ové a y -ové súradnice bodov modelovaných plôch poskytuje ešte bohatšiu paletu tvarov takto zovšeobecnených spirických plôch, zobrazených v druhom riadku na obr. 9.



Obr. 9. Spirické plochy generované z rôznych riadiacich kriviek

Parametrické v -krivky na spirických plochách ležia v rovnobežných rovinách, ktoré sú kolmé na spoločnú os systému generujúcich afinít v súradnicovej osi z . V bodoch týchto „rovnožežkových kriviek“ plochy tvoria dotyčnice meridiánových kriviek dotýkovú kužeľovú plochu spirických plôch, ktorá sa plochy dotýka v príslušnej „rovnožežkovej krivke“.



Obr. 10. Dotýková rovina spirickej plochy v bode T určená dotyčnicami parametrických kriviek plochy v danom bode. Zobrazené sú ďalšie 2 dotyčnice parametrických u -kriviek v bodoch tej istej v -krivky ležiace na dotýkovej kužeľovej ploche danej spirickej plochy; vrcholom kužeľovej plochy dotýčníc je bod V na osi generujúcich afinít v súradnicovej osi z

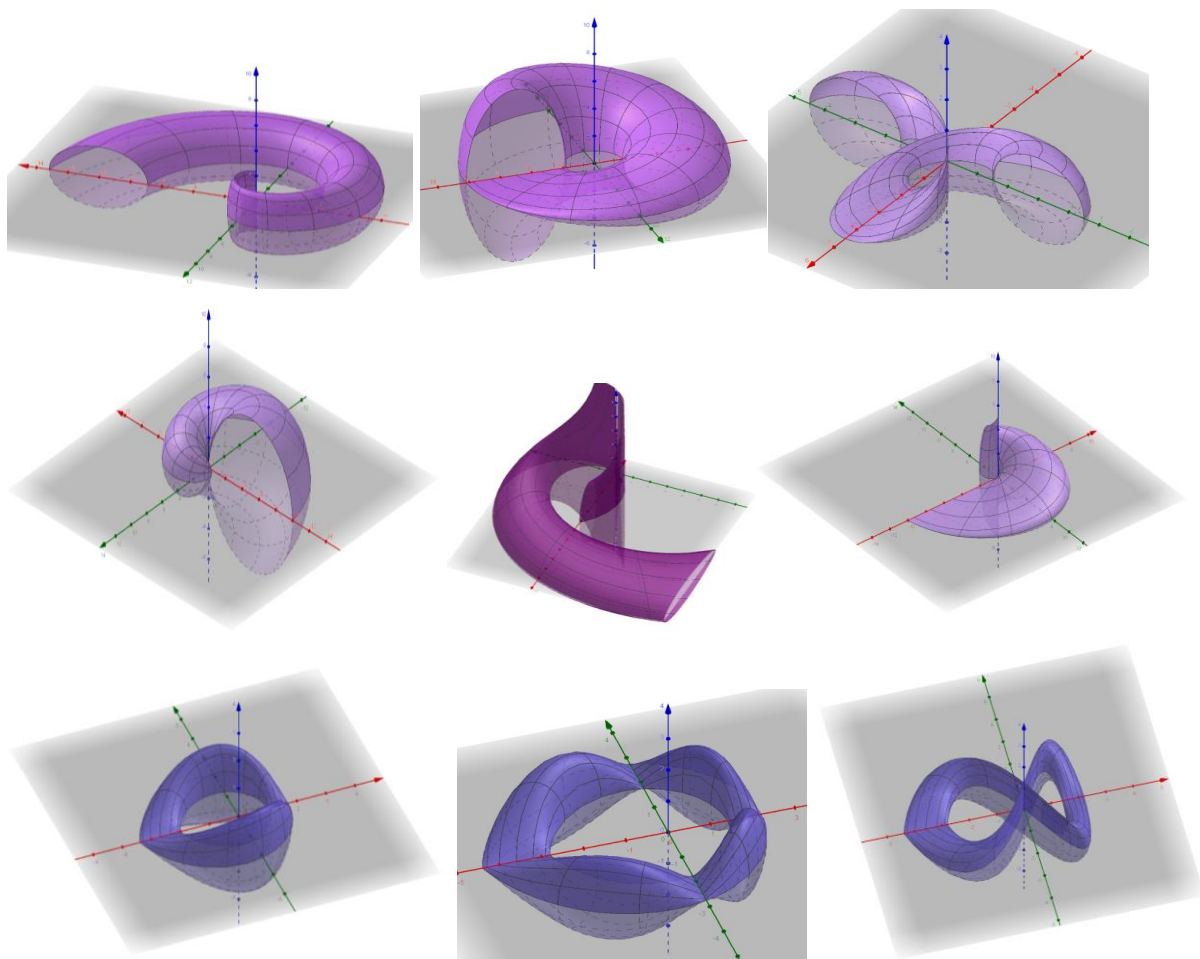
6 Zovšeobecnenia

Pselické plochy, prezentované ako zovšeobecnené dvojsové rotačné plochy Eulerovho typu ([4], [5]), pre ktoré platia špecifické podmienky determinujúce charakteristické funkcie systémov generujúcich kolíneácií

$$\forall v \in \langle 0,1 \rangle \subset \mathbf{R}: k(v) = \frac{1}{h(v)}, h(v) > 0 \wedge h(0) = h(1)$$

môžeme ďalej zovšeobecniť. Jednou z možností je uvažovať až o troch nezávislých spojitých a nenulových funkciách $h(v)$, $k(v)$ a $l(v)$ definovaných na jednotkovom uzavretom intervale, ktoré budú ovplyvňovať hodnoty súradníc bodov plochy. Parametrická forma vektorovej rovnice takto zovšeobecnenej plochy bude v tvare

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} (m + a \cos 2\pi u)h(v) \cos 2\pi v \\ (m + a \cos 2\pi u)k(v) \sin 2\pi v \\ b l(v) \sin 2\pi u \end{pmatrix}, (u, v) \in \langle 0,1 \rangle^2.$$



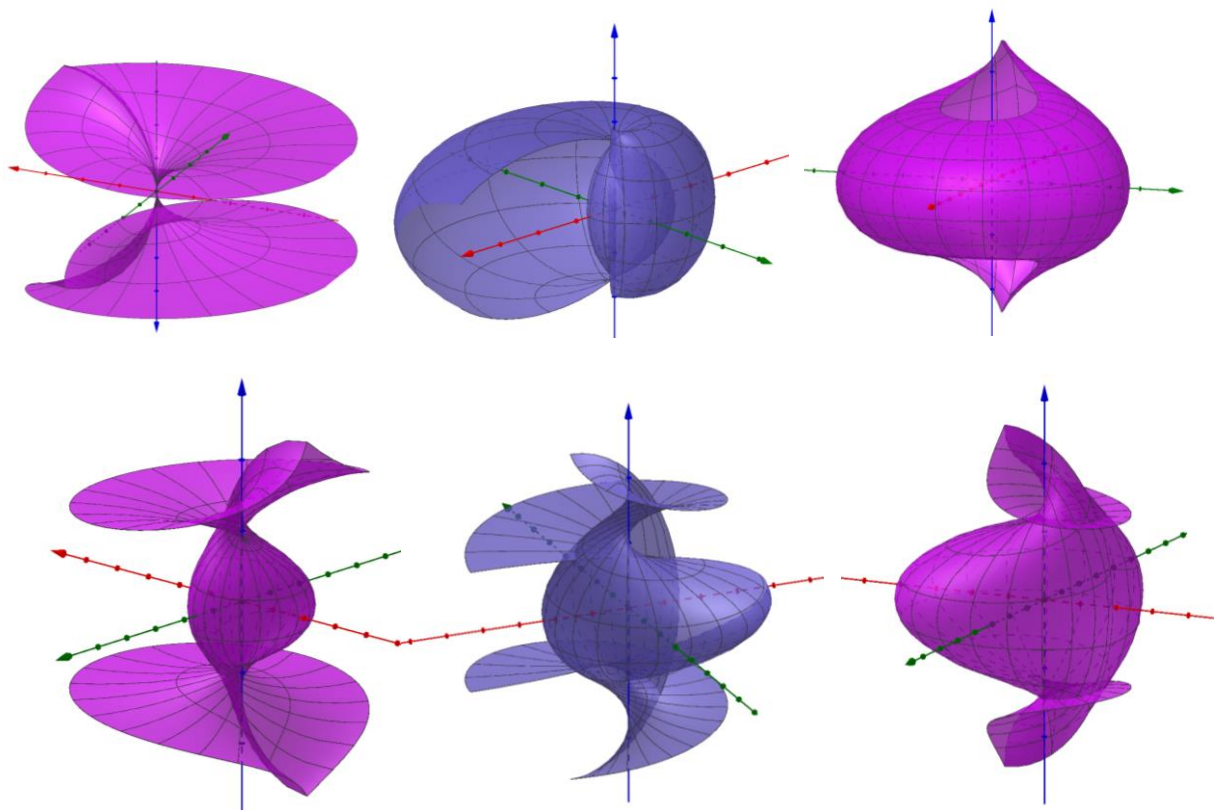
Obr. 11. Ilustrácie rôznych foriem zovšeobecnených pselických plôch

Množstvo nových možných foriem plôch, ktoré vzniknú, predstavuje bohatý inšpiračný zdroj pre vedeckú prácu pri vyšetřovaní vnútorných geometrických vlastností a hľadani závislostí jednotlivých určujúcich parametrov riadiacich kriviek s formou charakteristických funkcií.

7 Záver

Zámerom článku bolo predstaviť pôvodnú myšlienku profesora Františka Kadeřávka definovať špecifickú skupinu plôch na základe syntetickej konštrukcie založenej na transformáciách riadiacej krivky pomocou dvoch zložených systémov stredových kolíneácií. Generovaná skupina pselických plôch s typickým predstaviteľom – plochou nazvanou “armiloid” je v článku opísaná aj analyticky, pričom hlavná myšlienka o dvoch závislých charakteristikách dvoch generujúcich systémov kolíneácií bola zachovaná použitím charakteristických funkcií so špeciálnymi vlastnosťami.

Navrhnuté sú aj ďalšie zovšeobecnenia pôvodnej myšlienky vedúce k zaujímavým netypickým formám generovaných plôch, niektoré sú zobrazené na obr. 12. Pomocou osových afínít namiesto stredových kolíneácií je definovaná skupina spirických plôch, ktoré sú ilustrované v mnohých formách.



Obr. 12. Príklady ďalších zovšeobecnených pselických plôch

Literatúra

- [1] KADEŘÁVEK, F. Zovšeobecnění rotačních ploch. In *Věstník Královské české společnosti nauk* (1939), třída matematicko-přírodovědná, XVII, 3 str.
- [2] Digitální knihovna Akademie věd ČR, webová stránka dostupná na adrese: <https://www.lib.cas.cz/digitalni-knihovna/>

- [3] VELICHOVÁ, D. Two-axial surfaces of revolution. In *KoG*, N°9 (2005), Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics, Zagreb 2005, Croatia, pp.11-20.
- [4] VELICHOVÁ, D. Generalized surfaces of revolution. In *Proceedings of 12th International Conference on Geometry and Graphics ICGCG 2006*, Salvador de Bahia, Brasil, CDRom, T33, ISBN 85-86686-39-5.
- [5] VELICHOVÁ, D. Armiloid and Other Pselical and Spirical Surfaces. In *Proceedings, 26th Conference on Geometry and Computer Graphics*, JČU České Budějovice 2006, ČR, ISBN 80-7040-902-9, pp. 289-294.
- [6] VELICHOVÁ, D. Pselical Surfaces. In *Proceedings, 6th Conference on Applied Mathematics Aplimat*, Sjf STU Bratislava 2007, ISBN 978-80-969562-9-6, pp. 273-278.
- [7] VELICHOVÁ, D. Pselical surfaces. In *Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics Proceedings*, Olomouc 2022, pp. 185-190.

doc. RNDr. Daniela Velichová, Csc.

Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Námestie sobody 17, 812 31 Bratislava, Slovenská republika
e-mail: daniela.velichova@stuba.sk

Rapsódie na parabole

Michal Zamboj

Abstrakt

K. G. Ch. von Staudt popísal v diele *Beiträge zur Geometrie der Lage* geometrické konštrukcie aritmetických operácií. V tomto článku ukážeme špeciálny prípad konštrukcií na parabole. Predstavíme základné i ďalšie odvodené konštrukcie sčítania a násobenia v syntetickej aj analytickej podobe. Cieľom článku je poukázať na vzťahy medzi priamymi dôsledkami algebraických operácií a hlbšími geometrickými vlastnosťami paraboly. Zameriame sa na konštrukcie aritmetického, geometrického a harmonického priemeru. Von Staudtove konštrukcie budeme uvádzať aj vzhľadom k Matijasevičovej-Stečkinovej parabole a Möbiovému parabolickému nomogramu.

Kľúčové slová: parabola, von Staudtove konštrukcie, nomogram, projektívna geometria

Abstract

K. G. Ch. von Staudt described simple geometric constructions of arithmetic operations in his *Beiträge zur Geometrie der Lage*. We discuss a special case of a parabola in particular. Elementary and derived constructions of addition and multiplication are presented synthetically and analytically, and straightforward algebraic observations are interconnected with the deeper geometric properties of a parabola. We focus on constructions of arithmetic, geometric, and harmonic mean. Von Staudt's constructions are also discussed in relation to the Matiyasevich-Stechkin parabola and Möbius' parabolic nomogram.

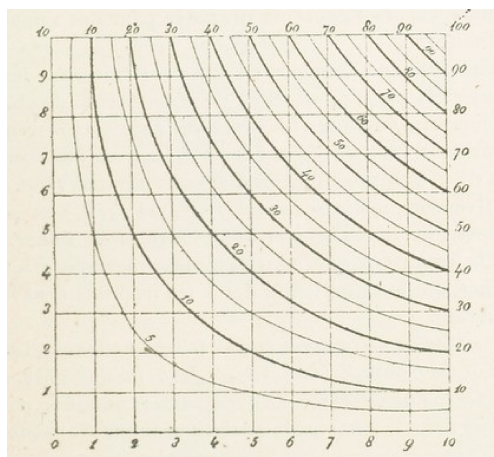
Keywords: parabola, von Staudt's constructions, nomogram, projective geometry

1 Úvod

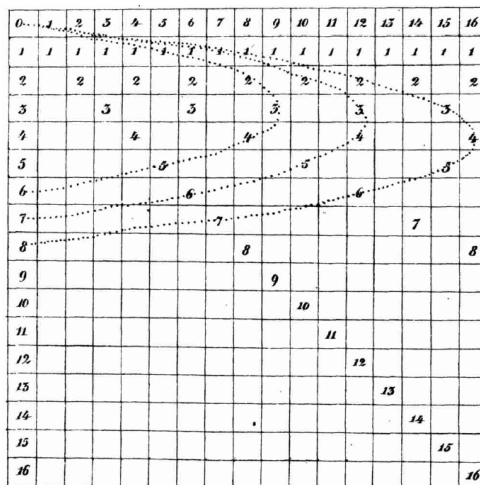
Geometrizácia a grafická interpretácia aritmetických úloh vedie často k nečakane silným matematickým vzťahom. Obor reálnych čísel typicky reprezentujeme pomocou priamky, resp. číselnej osi. V tomto článku sa však pozrieme na jednu netradičnú reprezentáciu rozšírených reálnych čísel a operácií s nimi na parabole.

Použitie grafických tabuliek a diagramov pre riešenie rovníc je skúmané v nomografii (pre širší prehľad, viď [1], [8]). Príkladom je jednoduchý multiplikatívny abakus na obr. 1a z d'Ocagneovej priekopníckej práce [5]. Vo všeobecnosti je úlohou nomografie nájsť grafické riešenia za pomoci sústavy troch parametrických funkcií (v obrázku sú to priamky $x = p_1$, $y = p_2$, $xy = p_3$, kde p_i sú reálne parametre).

Zaujímavý výsledok na grafe paraboly priniesli Matijasevič a Stečkin (viď [3]). Spojnice celočíselných hodnôt na oboch stranách paraboly (pre $x \leq -2$ a $x \geq 2$) sa pretínajú na y -ovej osi v zložených číslach. Dôsledkom sú prázdne miesta, ktoré vytvárajú prvočíselné sito na kladnej



a)



b)

Obr. 1. a) D'Ocagneova multiplikatívna tabuľka. Uvažujme napríklad priamky $x = 5$, $y = 2$. Ich priesečník leží na hyperbole $xy = 10$
b) Möbiove grafické násobenie na parabole
Zdroj: gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

časti y -ovej osi. Vlastnosti parabolického abaku skúmal o vyše storočie skôr Möbius (obr. 1b, [4]). Rekonštrukciu Möbiovej tabuľky prevedieme v závere (obr. 8), kde sa ukáže ako špeciálny prípad voľby súradníc na parabole. V článku prepojíme myšlienku geometrickej kalkulačky na parabole s von Staudtovými konštrukciami na kužeľosečkách v projektívnej geometrii ([7, str. 166–176], [10, str. 20–23]) a budeme sa venovať aritmetickým a geometrickým dôsledkom. Článok je prehĺbeným prekladom konferenčného príspevku [12]. Konštrukcie aritmetických operácií reálnych čísel na inom špeciálnom prípade — kružnici, je možné nájsť v [11].

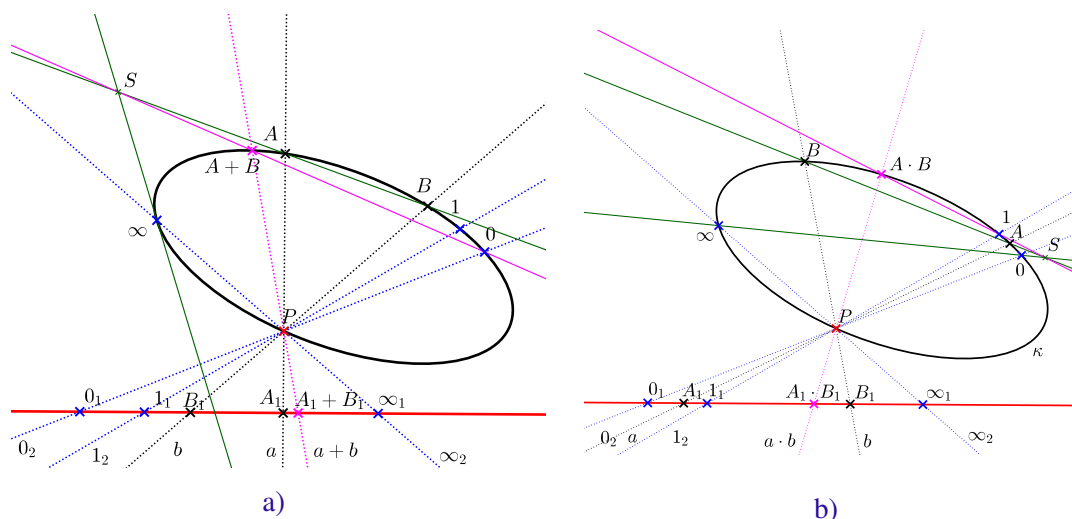
1.1 Von Staudtove konštrukcie na kužeľosečkách

Klasické von Staudtove konštrukcie sú obvykle uvádzané na priamke ako projektívnej škále (viď [6, str. 89–91], [2, str. 20–27]). Pri konštrukciách na parabole si vystačíme so stredoškolskou analytickou geometriou. Pre pochopenie hĺbky teoretického základu, si však ešte predtým ukážme von Staudtove konštrukcie súčtu a súčinu na kužeľosečkách v projektívnej (incidenčnej) geometrii [9, str. 20–23]. Pre potreby tohto článku sa zaoberáme bez dôkazu všeobecných konštrukcií. Naopak konštrukcie by išlo invariantne prenášať na ľubovoľnú kužeľosečku pomocou vhodných kolineácií z paraboly (prípadne z kružnice podľa [11]).

Na kužeľosečke zvolíme tri rôzne body $0, 1, \infty$, ktoré zadávajú projektívnu sústavu súradníc a ďalšie dva body A a B .

Konštrukcia súčtu: Spojnica $\overline{AB}$ sa pretne s dotyčnicou ku kužeľosečke bodom ∞ v bode S . Spojnica $\overline{S0}$ sa pretne s kužeľosečkou v druhom priesečníku $A + B$ (obr. 2a).

Konštrukcia súčinu: Spojnica $\overline{AB}$ sa pretne s $\overline{0\infty}$ v bode S . Spojnica $\overline{S1}$ sa pretne s kužeľosečkou v druhom priesečníku $A \cdot B$ (obr. 2b).



Obr. 2. a) Konštrukcia súčtu $A + B$ na kužeľosečke a jej projekcia na bodovú radu a zväzok priamok
 b) Konštrukcia súčinu $A \cdot B$ na kužeľosečke a jej projekcia na bodovú radu a zväzok priamok
 Zdroj: [9, str. 21–22]

2 Operácie na parabole

V jadre článku se budeme venovať špeciálnym prípadom von Staudtových konštrukcií sčítania a násobenia. Nech je daná parabola

$$y = x^2 \quad (1)$$

v karteziánskej sústave súradníc. Body na parabole označme ich x -ovými súradnicami (napr. $2[2, 4]$, $A[a, a^2]$...). Inak povedané, reálnu x -ovú os premietneme na parabolu pomocou rovnobežiek s osou y , resp. projektívne, zväzkom priamok so stredom v nevlastnom bode paraboly. Týmto spôsobom zobrazíme súradnicový systém na osi x na parabolu a to tak, že 0 na osi sa zobrazí do vrcholu paraboly, nevlastný bod osi x sa zobrazí na nevlastný bod ∞ paraboly a jednotkový bod na osi sa zobrazí na bod $1[1, 1]$ na parabole. Upozorňujeme, že všetky konštrukcie, ktoré ďalej prevedieme by fungovali aj na inej voľbe (projektívnej) súradnicovej sústavy $0, 1, \infty$ na parabole. S príkladom takej sústavy sa znovu stretneme pri rekonštrukcii Möbiovej tabuľky (obr. 8).

2.1 Spojnica bodov na parabole

Vo všetkých nadchádzajúcich konštrukciách pre nás bude významná priamka $\overline{AB}$, kde A a B sú body paraboly. Jej rovnica je:

$$y = (a + b)x - ab. \quad (2)$$

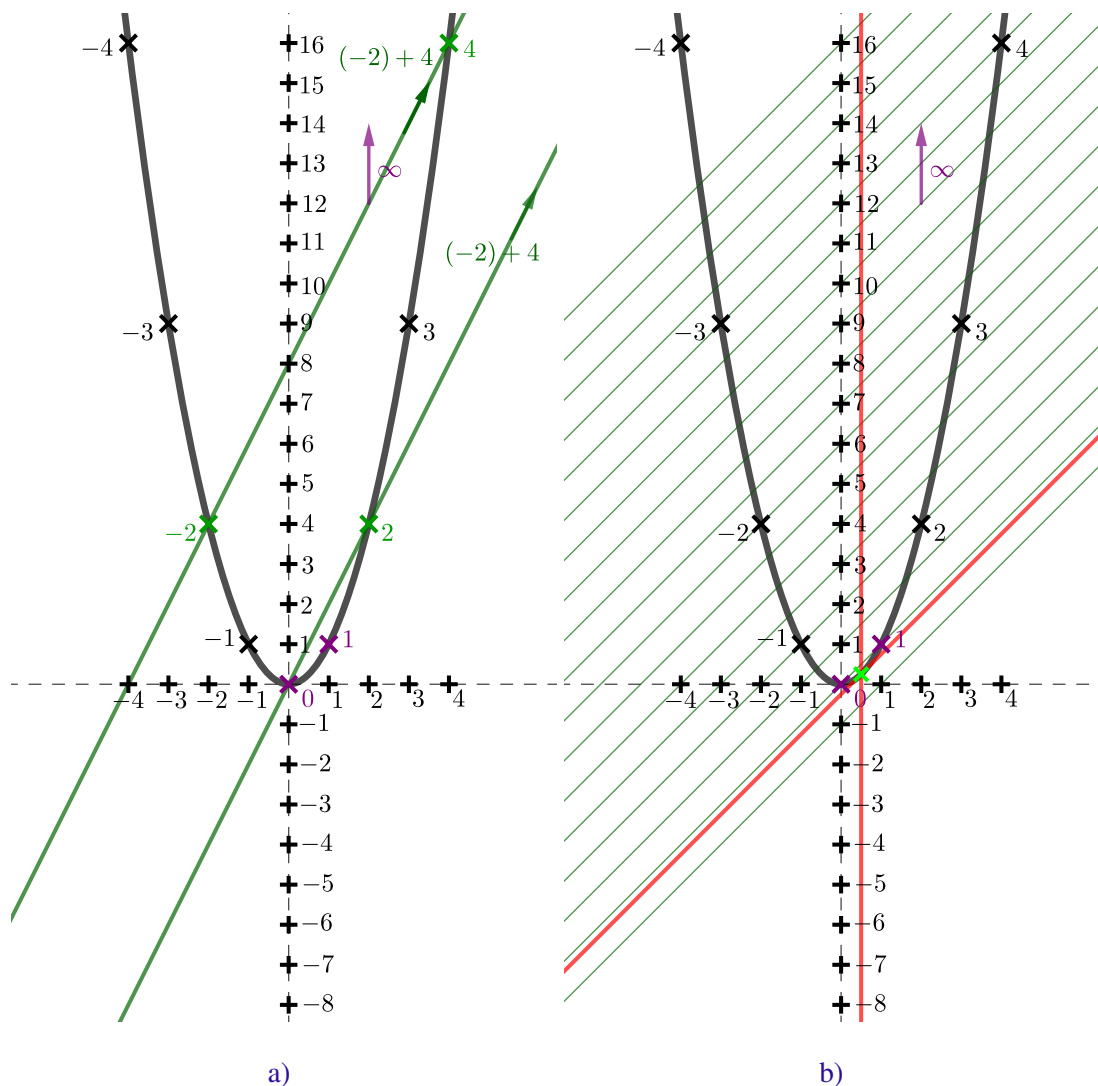
V istom zmysle je elegantné si túto rovnicu odvodiť aj v projektívnych homogénnych súradniciach. Stačí nám k tomu vektorový súčin bodov $(a, a^2, 1) \times (b, b^2, 1) = (a^2 - b^2, b - a, ab^2 - a^2b)$ a po skrátaní $(a - b)$, $a \neq b$ dostaneme koeficienty rovnice priamky $(a + b, -1, -ab)$.

Za povšimnutie stojí, že táto rovnica v sebe priamo obsahuje hodnoty súčtu a súčinu a a b .

V špeciálnom prípade, pre $A = B$, resp. $a = b$ dostaneme rovnicu

$$y = 2ax - a^2. \quad (3)$$

2.2 Sčítanie a aritmetický priemer



Obr. 3. a) Konštrukcia súčtu -2 a 4

b) Priesečníky paraboly so všetkými rovnobežnými priamkami majú rovnaký súčet. Bod dotyku je aritmetický priemer

Majme na parabole dva body A a B (obr. 3a). Podľa von Staudtovej konštrukcie pre súčet $A + B$ zostrojme spojnicu $\overline{AB}$. Priesečník $\overline{AB}$ s dotyčnicou paraboly v nevlastnom bode ∞ spojme s bodom 0 (t.j., rovnobežka s $\overline{AB}$ prechádzajúca 0). Priesečník paraboly s rovnobežkou je bod $A + B$.

Správnosť konštrukcie overíme priamym výpočtom súradníc bodu $A + B$. Rovnobežka s $\overline{AB}$ bodom 0 má rovnicu s rovnakou smernicou $(a + b)$, t.j.:

$$y = (a + b)x. \quad (4)$$

Priesečník s parabolou (rovnica (1)) po substitúcii do (rovnice (4)) má súradnice $x = a + b$, $y = (a + b)^2$.

Z predchádzajúcej konštrukcie priamo vyplýva, že každá sečnica paraboly rovnobežná s $\overline{AB}$ pretne parabolou v priesečníkoch s rovnakým súčtom $A + B$ (obr. 3b). Inak povedané, smernica priamky prechádzajúcej bodmi A, B udáva hodnotu ich súčtu.

V prípade voľby $A = B$ prejde sečnica v dotyčnicu (viď rovnicu (3)). Tento vzťah je zrejmý aj zo smernicového tvaru, kde smernica $2a$ je smernicou dotyčnice k uvedenej parabole (napr. ako grafu funkcie za pomoci derivácie). Rovnobežka s dotyčnicou vedená bodom 0 teda pretne parabolou v druhom priesečníku s dvojnásobnou hodnotou. V prípade $A = -B$ dostaneme namiesto sečnice bodom 0 dotyčnicu. Bod 0 tak považujeme aj za druhý priesečník, resp. hodnotu súčtu. Uvedená konštrukcia funguje správne aj v prípade voľby bodov 0 a ∞ (súčet ∞ s akýmkoľvek ďalším číslom na parabole je ∞ , pričom môžeme vhodne voliť model, kde $\infty = -\infty$).

Z geometrickej konštrukcie súčtu je zrejmá aj vlastnosť komutativity. Zámenou bodov A, B sa totiž konštrukcia nezmení. Krok po kroku by sa takto dali overovať aj ďalšie vlastnosti sčítania a prikladať ich geometrické interpretácie. Môžeme si tiež všimnúť, že pre konštrukciu súčtu sme nepotrebovali bod 1, čo je v súlade so štrukturálnymi vlastnosťami.

Podme nájsť hodnotu aritmetického priemeru dvoch hodnôt. Pre dve zadané hodnoty A a B hľadáme hodnotu $\frac{A+B}{2}$. Povšimnime si rozklad $A + B = \frac{A+B}{2} + \frac{A+B}{2}$. Z konštrukcie súčtu plynie, že hľadáme priamku dotýkajúcu sa paraboly v dvojnásobnom bode $\frac{A+B}{2}$ a jej smer bude smer priamky $\overline{AB}$. Ak uvažíme x -ové súradnice bodov A a B a ich aritmetického priemeru, môžeme spozorovať dobre známu vlastnosť paraboly: Stredy rovnobežných tetív paraboly (resp. aritmeticky, tetív s rovnakým súčtom) ležia na rovnobežke s osou paraboly, ktorá pretína parabolou v dotykovom bode dotyčnice paraboly v smere tetív. Z projektívneho pohľadu môžeme spojnicu stredov interpretovať ako poláru nevlastného bodu prislúchajúceho smeru tetív. Stred tetivy je harmonicky združený bod k tomuto nevlastnému bodu.

Pozrime sa ešte na prípad súčtu $0 + A$ v našom špeciálnom prípade. Smernica priamky

$$\overline{0A} : y = ax, \quad (5)$$

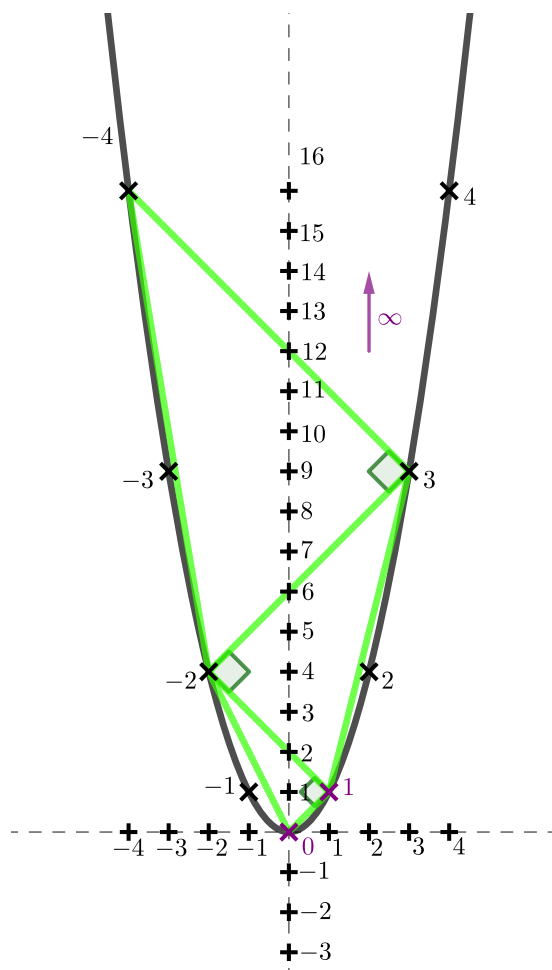
je hodnota a . Z rovnice môžeme vyjadriť normálu k tejto priamke prechádzajúcu bodmi 0 a A' s rovnicou:

$$\overline{0A'} : y = -\frac{1}{a}x. \quad (6)$$

Naopak, spojnice bodu 0 s bodom s hodnotou a a jej opačnou prevrátenou hodnotou $-\frac{1}{a}$ budú k sebe kolmé. Pretože všetky tetivy v jednom smere majú rovnaké súčty, môžeme v parabole ľahko nájsť pravouhlé trojuholníky. Uvažujme napr. trojuholník s vrcholmi $-1, 2, -3$. Pretože, $-1 + 2 = 1$ a $2 + (-3) = -1 = -\frac{1}{1}$, bude vo vrchole 2 pravý uhol. Rovnako pre všetky ďalšie hodnoty $t, -(t+1), t+2$ a $-t, t+1, -(t+2)$, kde $t \geq 0$ (obr. 4).

2.3 Násobenie a geometrický priemer

Pokračujme s konštrukciou násobenia. Znovu majme dané body A, B na parabole (obr. 5a). Ich súčin $A \cdot B$ zostrojíme najprv podľa von Staudtovej konštrukcie. Nájdeme priesečník priamky

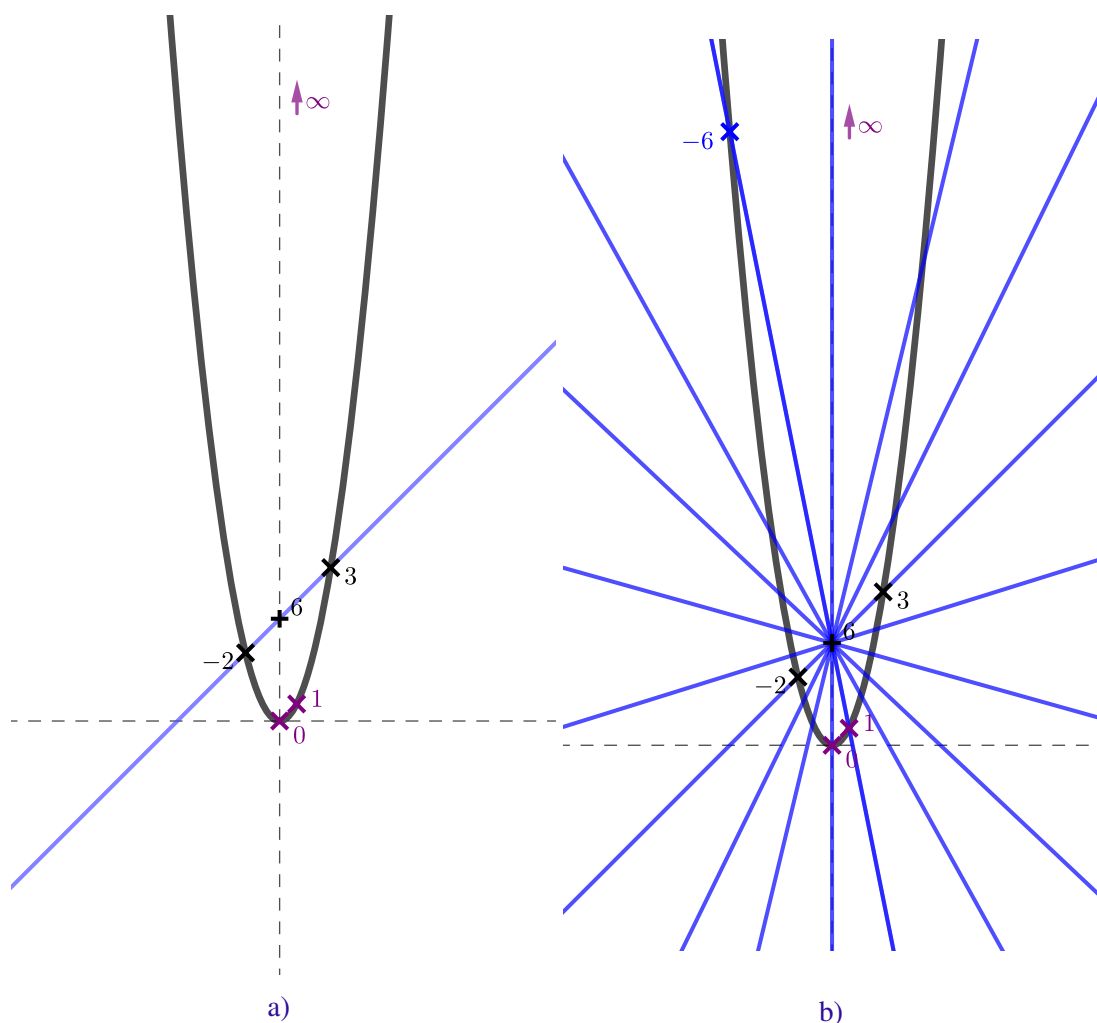


Obr. 4. Konštrukcia pravouhlých trojuholníkov
 $\triangle(0; 1; -2)$, $\triangle(1; -2, 3)$, $\triangle(-2, 3, -4)$

$\overline{AB}$ s osou paraboly $\overline{0\infty}$ a zostrojíme jeho spojnicu s bodom 1. Druhý priesečník tejto spojnice s parabolou je bod $A \cdot B$. Pre overenie konštrukcie sa vráťme k rovnici (2) priamky $\overline{AB}$ (rovnica (2)). Os paraboly je zároveň y -ová os sústavy súradníc. Priesečník $\overline{AB}$ a y má preto súradnice $x = 0, y = -a \cdot b$. Pretože táto vlastnosť platí pre ľubovoľnú dvojicu A, B (vrátane 0 a ∞ , ak nie obe súčasne), tak každá sečnica paraboly prechádzajúca bodom $[0, -a \cdot b]$ ju pretne v priesečníkoch s rovnakým súčinom $a \cdot b$ ich x -ových súradníc (obr. 5b). A teda za jednu z takýchto dvojíc môžeme voliť body $1[1, 1]$ a $A \cdot B[a \cdot b, (a \cdot b)^2]$.

Ak by sme jeden z bodov A, B volili 0 (t.j. bod na osi) a druhý bod by bol vlastný bod paraboly, tak 0 je samotným druhým priesečníkom a výslednou hodnotou. Ak by sme zvolili $A = \infty$ a $B \notin \{0, \infty\}$, tak druhým priesečníkom sečnice bodom 1 s parabolou bude znovu nevlastný bod ∞ . Toto platí aj pre hodnoty ∞ a $\pm\infty$ (za predpokladu zjednotenia hodnôt ∞ a $-\infty$ v jednom bode). Ak by sme volili body 0 a ∞ , tak táto spojnica splyva s osou a súčin sa nedá určiť.

Pre násobenie bodu samého so sebou uvažujeme, podobne ako pri sčítaní, dotýčnicu paraboly namiesto sečnice. Ďalej, špeciálne pre body $A[a, a^2]$ a $-A[-a, a^2]$ je spojnica vodorovná a jej priesečník s y -ovou osou je priamo hodnota a^2 . Z toho je badať jednoduchú konštrukciu bodov s hodnotou druhej odmocniny, stačí na osi y nájsť hodnotu b a jej kolmé priemety na parabolou

Obr. 5. a) Konštrukcia súčiny hodnôt -2 a 3

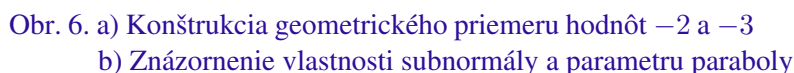
b) Priesečníky paraboly s každou priamkou zväzku majú rovnaký súčin

budú body $\pm\sqrt{B}[\pm\sqrt{b}, b]$.

Podme ukázať konštrukciu geometrického priemeru dvoch bodov (obr. 6a). Na začiatok predpokladajme body A a B také, že $A \cdot B \geq 0$. V tomto prípade leží priesečník $\overline{AB}$ s osou y v nekladnej časti osi. Hľadáme hodnotu $\sqrt{A \cdot B}$. Povšimnime si rozklad $(\pm\sqrt{A \cdot B}) \cdot (\pm\sqrt{A \cdot B}) = A \cdot B$, a teda (podobne ako u aritmetického priemeru), jedna dotyčnica z bodu $[0, -a \cdot b]$ sa dotkne paraboly v dvojnásobnom bode $\sqrt{A \cdot B}$ a druhá v $-\sqrt{A \cdot B}$. Všimnime si, že pre $A \cdot B < 0$ je priesečník s y -ovou osou vnútorným bodom paraboly a reálna dotyčnica neexistuje.¹ Opäť môžeme pridať pozorovanie z projektívnej geometrie. Všimnime si, že pre bod $[0, -a \cdot b]$ na ose paraboly je spojnice $\sqrt{A \cdot B}$ a $-\sqrt{A \cdot B}$ polárou. Táto polára je rovnobežná s vrcholovou dotyčnicou a je vzdialená od vrcholu 0 o vzdialenosť $a \cdot b$ (rovnako ako vzdialenosť jej pólu od vrcholu). Z toho tiež plynie, že priesečníky každej sečnice paraboly prechádzajúcej bodom na osi sú takouto polárou kolmou na os harmonicky oddelené.

Znovu je z konštrukcie priamo vidieť komutatívitu násobenia. Z vlastností násobenia reálnych čísel by sa dal odvodiť celý rad ďalších tvrdení. Napríklad, pre ďalší dôsledok pozorujme,

¹Je však možné nájsť komplexné dotyčnice.



Nakoniec sa pozrime na vzťah násobenia a kolmosti (obr. 6b). Už vieme, že pomocou kolmice môžeme nájsť bod s opačnou prevrátenou hodnotou. Majme daný bod $A[a, a^2]$ na parabole. Dotyčnica v tomto bode má smernicu $2a$ a jej normála bude mať smernicu $-\frac{1}{2a}$. Platí, že $0 + (-\frac{1}{2a}) = A + (-A - \frac{1}{2A})$, a preto normála prechádzajúca bodom A bude mať druhý priesečník v bode $(-A - \frac{1}{2A})$. Priesečník normály s osou má podľa konštrukcie násobenia y -ovú súradnicu $-a \cdot (-a - \frac{1}{2a}) = a^2 + \frac{1}{2}$. Navyše, kolmý priemet bodu A do y -ovej osi má súradnice $[0, a^2]$. Vzdialenosť priesečníka normály v bode A s osou a kolmého priemetu bodu A do osi je potom konštanta $a^2 + \frac{1}{2} - a^2 = \frac{1}{2}$. Táto hodnota je dĺžkou subnormály a je rovnaká ako parameter paraboly. Výpočet je možné overiť analyticky. Vyjadrime si dotyčnicu paraboly v bode A :

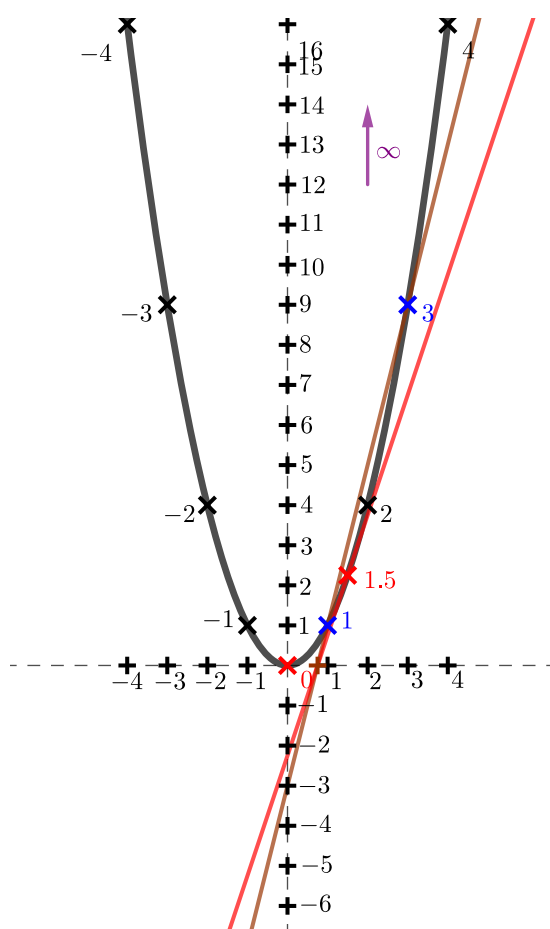
$$\overline{AA}: y = 2a - a^2. \quad (7)$$

Normála v bode A bude mať rovnicu:

$$\overline{AA}^\perp : y = -\frac{x}{2a} + (a^2 + \frac{1}{2}). \quad (8)$$

Normála pretne os $y : x = 0$ v bode $[0, a^2 + \frac{1}{2}]$, ktorého vzdialenosť od kolmého priemetu bodu A do osi je $\frac{1}{2}$.

2.4 Harmonický priemer



Obr. 7. Konštrukcia harmonického priemeru hodnôt 1 a 3

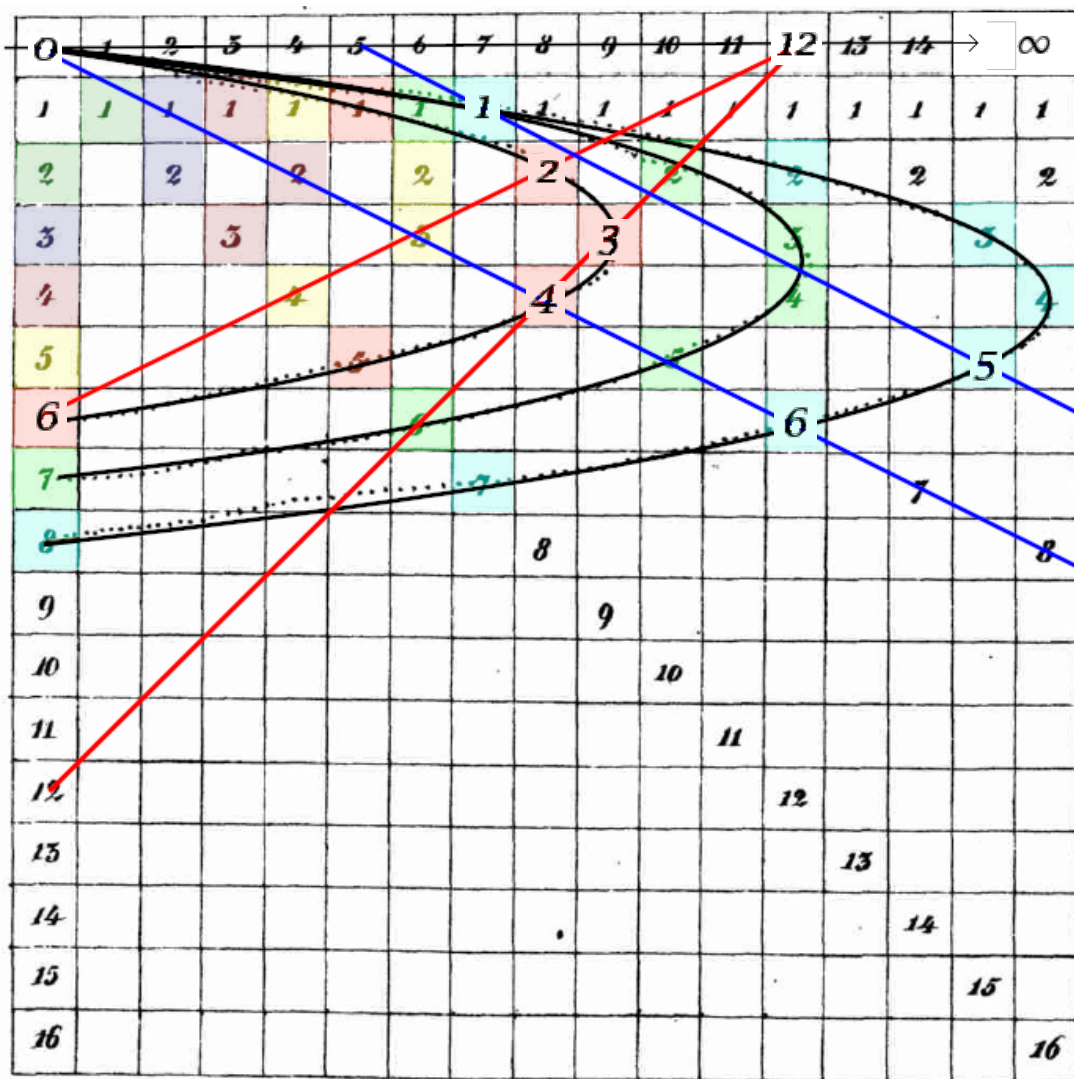
Na záver poďme preskúmať konštrukciu harmonického priemeru dvoch bodov na parabole (obr. 7). Využijeme priesečník priamky $\overline{AB}$ s x -ovou osou (vrcholová dotyčnica paraboly v bode 0). Dosadením $y = 0$ do (rovnice (2)), dostávame $[\frac{a+b}{a \cdot b}, 0]$. Jedna dotyčnica paraboly prechádzajúca týmto bodom je os x , a tú druhú vyjadríme nasledovne:

$$\frac{a+b}{a \cdot b}x - \frac{1}{2}y = 0. \quad (9)$$

Dotykový bod druhej dotyčnice paraboly má súradnice $[\frac{2a \cdot b}{a+b}, (\frac{2a \cdot b}{a+b})^2]$, a vyjadruje harmonický priemer A a B .

Napokon pridajme ešte jedno pozorovanie. Všimnime si, že body $0, A, \frac{2A \cdot B}{A+B}, B$ tvoria harmonickú štvoricu. Na overenie stačí dopočítať dvojpomer x -ových súradníc uvedených bodov. Dostávame

$$\left(A, B; \frac{2A \cdot B}{A+B}, 0\right) = \frac{A - \frac{2A \cdot B}{A+B}}{B - \frac{2A \cdot B}{A+B}} \cdot \frac{B - 0}{A - 0} = -1.$$



Obr. 8. Rekonštrukcia obr. 1b. Zobrazený je systém $(0, 1, \infty)$ a násobenie $2 \cdot 6$ a $3 \cdot 4$ na červených poliach. Modrou farbou je zvýraznená rovnobežnosť tetív rovnakých súčtov.

3 Záver

Pomocou reprezentácie reálnych čísel na parabole sme ukázali geometrické konštrukcie vedúce k jednoduchým aritmetickým operáciám. Navyše, pridaním nevlastného bodu paraboly ako bodu ∞ fungujú takto vybudované aritmetické operácie správne aj na rozšírení reálnych čísel. Podobné konštrukcie sú z hľadiska projektívnej geometrie možné aj vo všeobecných prípadoch. Ľubovoľne môžeme voliť kužeľosečku i súradnicový systém $(0, 1, \infty)$.

Podme na záver v tejto súvislosti zrekonštruovať Möbiove násobenie na tabuľke s parabolami (obr. 8). Všimnime si, že, na rozdiel od našej voľby vo vrchole, je Möbiova voľba bodu 0 vždy v ľavom hornom rohu tabuľky. Bod ∞ je, rovnako ako u nás v smere osi paraboly. A nastavenie bodu 1 v prvom riadku udáva parabolou.² V tomto systéme sa spojnice bodov napr. $\overline{2;6}$ a $\overline{3;4}$ pretnú na $\overline{0\infty}$ v hodnote 12. Möbius teda použil rovnaký spôsob konštrukcie násobenia na jednotlivých parabolách, avšak na inej voľbe projektívneho súradnicového systému. Samozrejme, von Staudtove konštrukcie na seba nechali čakať ďalšie desaťročie.

Literatúra

- [1] EVESHAM, H.A. *The History and Development of Nomography*. Docent Press, 2010.
- [2] HLAVATÝ, V. *Projektivní geometrie I*. Melantrich, Praha, 1944.
- [3] MATIYASEVICH, J. *First encounter with nomograms* (russian). Kvant, 2(5), 25, 1971, p. 4.
- [4] MÖBIUS, A.F. Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel. Im *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Issue 22, 1841, pp. 276–284.
- [5] d'OCAGNE, M. *Traité de nomographie*. Paris, Gauthier-Villars, 1899.
- [6] RICHTER-GEBERT, J. *Perspectives on Projective Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [7] Ch. von STAUDT, K.G. *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Nuremberg, Fr. Korn, 1856.
- [8] TOURNES, D. Calculating with hyperbolas and parabolas. É. Barbin (ed.). *Let History into the Mathematics Classroom*, Springer, pp.101-114, 2018.
- [9] ZAMBOJ, M. Parabola a jej podobnosť. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2018*, Praha, Česká republika: pp. 73-77.
- [10] ZAMBOJ, M. *Synthetic Projective Geometry*. Dissertation thesis, Charles University, 2019.
- [11] ZAMBOJ, M. Aritmetické operácie na priamke a kružnici. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2022*, Praha, Česká republika: pp. 91-99.
- [12] ZAMBOJ, M. Calculating on a parabola. In *Proceedings of Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2023*, Kremnica, Slovak Republic: pp. 203-210.

Mgr. Michal Zamboj, Ph. D.

Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
 M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1, Česká republika
 e-mail: michal.zamboj@pedf.cuni.cz

²Parabolou je možné zostrojiť z troch rôznych bodov a smeru osi.

Abstracts

V. Gáliková: Symmetry, beauty and benefit

Symmetry is a concept combining relativity and absoluteness. To show symmetry is to have traits that are retained despite some changes. Thus, the changed aspects are relative in terms of symmetry, and those that have been preserved are absolute. It is also a concept combining beauty, play and rules. In our text we will look at this phenomenon in nature, art and science.

A. Králová: One-sheet rotational hyperboloid. Derivation of parameterization and creation of visualization in program Maple

In this article, we present derivation of parametric equations of a one-sheet rotational hyperboloid. Using these equations it is possible to create a graphical representation of this surface in program Maple.

D. Velichová: Armiloid – pselical and spirical surfaces

Pselical surfaces form a specific group of surfaces that can be regarded as generalized two-axial surfaces of revolution, surfaces of Euler type, in particular. These surfaces can be generated from a basic curve by applying 2 systems of linked central collineations. Armiloid, as one typical representative of this group, was defined synthetically and presented in 1939 by Professor Dr. František Kadeřávek. In this paper we describe the synthetic construction of armiloid, introduce its analytic vector representation and further generalize it to the presented groups of pselical and spirical surfaces. Illustrations of surface form variations are included.

M. Zamboj: Rhapsodies on parabola

K. G. Ch. von Staudt described simple geometric constructions of arithmetic operations in his *Beiträge zur Geometrie der Lage*. We discuss a special case of a parabola in particular. Elementary and derived constructions of addition and multiplication are presented synthetically and analytically, and straightforward algebraic observations are interconnected with the deeper geometric properties of a parabola. We focus on constructions of arithmetic, geometric, and harmonic mean. Von Staudt's constructions are also discussed in relation to the Matiyasevich-Stechkin parabola and Möbius' parabolic nomogram.

Edited by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

SSGG

Editor-in-Chief:

Daniela Velichová

Managing Editors:

Dagmar Szarková

Daniela Richtáriková

Editorial Board:

Ján Čižmár

Andrej Ferko

Pavel Chalmovianský

Mária Kmeťová

Margita Vajsáblová

G is a scientific journal covering the fields of geometry and graphics for publication of original scientific papers, review and information articles, reports, state-of-the-art reviews, communications and other contributions from all geometric disciplines (elementary, descriptive, constructive, projective, coordinate, differential, algebraic, computer, computational, finite, non-Euclidean) and topology, geometric modelling and computer graphics, in the area of the basic theoretical research, education of geometry in all types of schools, from the history and methodology of the development of geometry and on applications of geometry and geometric methods in different scientific, social or technical disciplines.

Editorial office: Slovak Society for Geometry and Graphics

IČO: 31 816 304

Faculty of Mechanical Engineering

Slovak University of Technology in Bratislava

Námestie slobody 17

812 31 Bratislava, Slovakia

Correspondence concerning subscriptions, claims and distribution:

Redakcia G - SSGG

SjF STU, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

ssgg@ssgg.sk

Frequency:

One volume per year consisting of two issues at a price of EUR 20,- per volume, not including surface mail shipment abroad.

Evidentiary number EV 3228/09

Information and instructions for authors are available at the address: www.ssgg.sk

Printed by: ForPress Nitrianske tlačiarne, s.r.o.

G is indexed in: Zentralblatt für Mathematik

Copyright © SSGG December 2023, Bratislava, No. 2/2023

All rights reserved. No part may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without prior written permission from the Editorial Board. All contributions published in the journal were reviewed with respect to their scientific

www.ssgg.sk